

# Niet-lineaire systemen

## 1 Inleiding

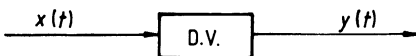
### 1.1 Bij dit hoofdstuk

Veel systemen hebben een *niet-lineair gedrag*. Dit wordt meestal veroorzaakt doordat het systeem tegen begrenzingen aanloopt. Voorbeelden zijn er te over, denk maar aan:

- het ‘gasgeven’ in een auto en de reactie van de motor daarop;
- het verdraaien van het stuurwiel op een schip en de daarop volgende koersverandering van het schip;
- de toerentaltoename van een elektrische aandrijving als de stuurspanning toeneemt;
- het toenemend verkoopeffect als resultaat van een intensievere reclamecampagne;
- enzovoort.

### 1.2 Introductie

Een systeem dat beschreven kan worden door een (stelsel) lineaire differentiaalvergelijking(en) noemt men per definitie lineair. In figuur 1 is schematisch een lineair systeem aangegeven, waarvan de ingang door  $x$  en de uitgang door  $y$  wordt voorgesteld.



**Figuur 1** Schematische voorstelling van een lineair systeem

We nemen aan dat de relatie tussen de ingang  $x$  en de uitgang  $y$  wordt beschreven door de volgende systeemdifferentiaalvergelijking:

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = \\ b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x \end{aligned} \quad (1)$$

De differentiaalvergelijking is lineair omdat hierin geen machten van  $x$  en  $y$  en hun afgeleiden, hoger dan één en bovendien geen producttermen van deze veranderlijken voorkomen. Indien bovendien  $a$  en  $b$  onafhankelijk van de tijd zijn, noemt men de differentiaalvergelijking lineair met constante coëfficiënten. Het systeem heet dan *lineair* en *tijdsonafhankelijk*. De eigenschappen van zo'n systeem veranderen niet in de tijd.

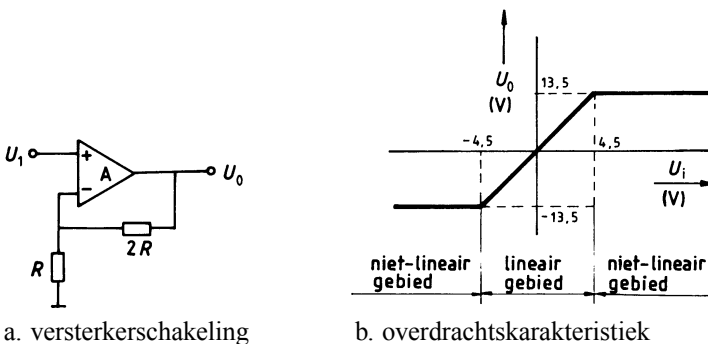
Hoewel in feite nagenoeg geen enkel fysisch systeem lineair is, spreekt men vaak toch van een lineair systeem als dit systeem in het beschouwde gebied (het zogenaamde werkgebied) wél aan de differentiaalvergelijking volgens (1) voldoet. Deze differentiaalvergelijking beschrijft dan het gedrag in het instelpunt voor kleine signaalveranderingen rond dit instelpunt.

## 2 Nadere beschouwing over het begrip lineariteit.

Aan de hand van een aantal voorbeelden zal het begrip lineariteit nader worden toegelicht.

### ● Voorbeeld 1

In figuur 2a is een elektronische versterkerschakeling met bijbehorende statische overdrachtskarakteristiek (relatie tussen ingangsspanning  $U_i$  en uitgangsspanning  $U_o$ ) weergegeven. De versterking van de operationele versterker is  $A$ ; in de praktijk is deze versterking heel groot.



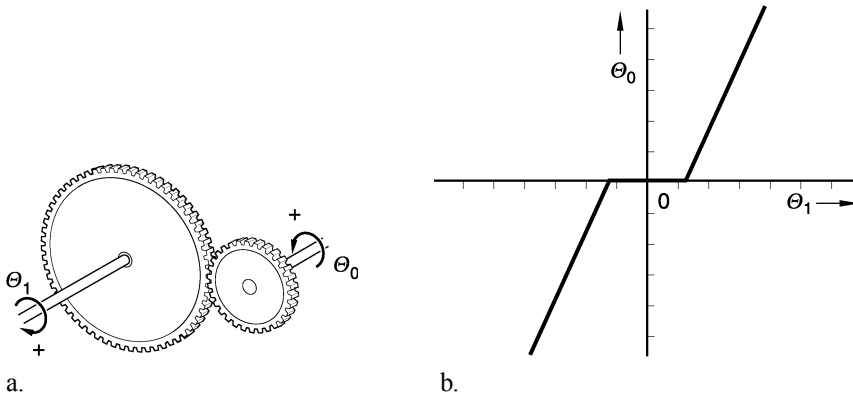
Figuur 2 Elektronische versterker

Ten gevolge van begrenzing door de voedingsspanning van de operationele versterker (+15 V en -15 V) blijkt het uitgangssignaal maximaal +13,5 V of -13,5 V te kunnen bedragen. Omdat de versterking van deze versterkerschakeling 3 bedraagt (ga dit na!), geschiedt begrenzing van het uitgangssignaal vanaf een ingangsspanning van 4,5 V. De karakteristiek toont aan dat de overdracht  $U_o/U_i = 3$ , zolang  $|U_i| \leq 4,5$  V. Indien  $|U_i| \geq 4,5$  V, zal de uitgang begrenzen (*verzadiging*) en de overdracht niet langer 3 bedragen. In figuur 2b zijn de zogenoemde lineaire en niet-lineaire gebieden aangegeven.

.....

● **Voorbeeld 2**

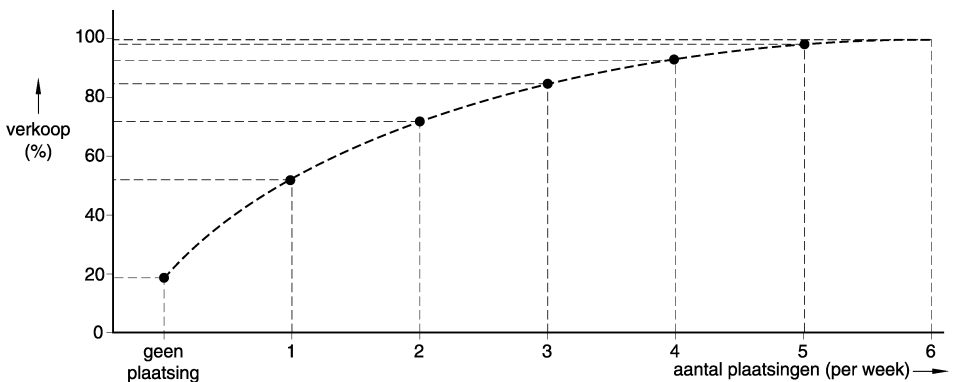
In figuur 3a is schematisch een tandwieloverbrenging aangegeven. Door de speling tussen de tanden treedt er bij de overgang van de ene draairichting naar de andere een zogenoemde *dode slag* op. In dit gebied verandert wel de draairichting van het aandrijvende wiel, maar pas na een bepaalde hoekverdraaiing verandert ook de draairichting van het aangedreven wiel. Zie figuur 3b voor de karakteristiek vanuit steeds dezelfde beginstand 0.



**Figuur 3** Dode zone bij een tandwieloverbrenging

● **Voorbeeld 3**

Om de verkoop van een bepaald artikel te stimuleren wordt een reclamecampagne gestart en er wordt een advertentie in een landelijk dagblad geplaatst. Vastgesteld wordt dat de frequentie van plaatsing niet evenredig is met het koopgedrag (zie fig. 4).



**Figuur 4** Verkoop als functie van advertentiefrequentie

Door het uitvoeren van een *kosten/baten-analyse* kan worden nagegaan welke frequentie van adverteren gunstig is.

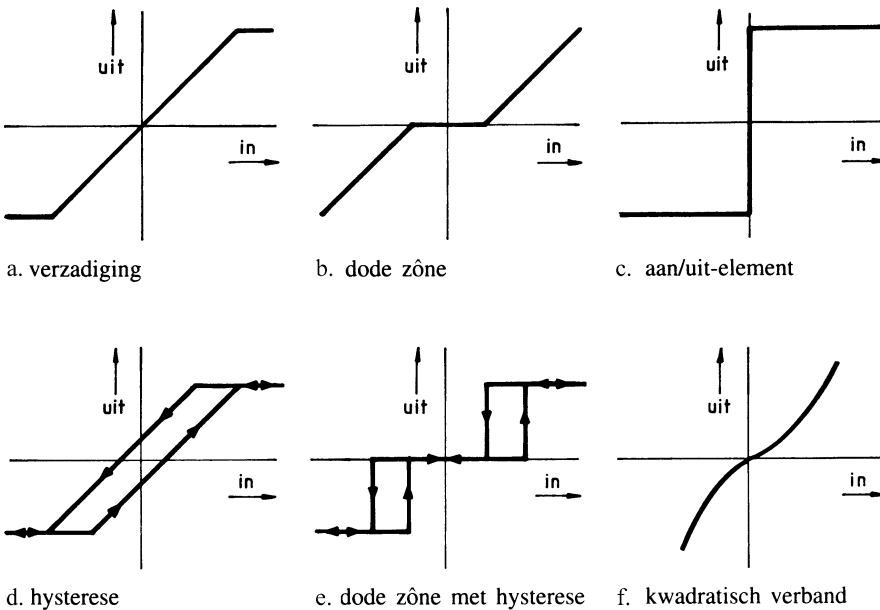
.....

Een belangrijke eigenschap van een lineair systeem is het zogenoemde *superpositiebeginsel*. Stel, een systeem heeft als ingang  $x$  en als uitgang  $y$ . Indien nu een ingangsvariatie  $x_1$  een uitgangsvariatie  $y_1$ , en evenzo een ingangsvariatie  $x_2$  een uitgangsvariatie  $y_2$  tot gevolg heeft, dan geldt volgens het superpositiebeginsel: een ingangsverandering  $ax_1 + bx_2$  heeft een uitgangsverandering  $ay_1 + by_2$  tot gevolg, met  $a$  en  $b$  als constanten.

Voor een niet-lineair element geldt het superpositiebeginsel niet, omdat het verband tussen de in- en uitgang niet onafhankelijk is van de grootte van hetingangssignaal. Een typisch kenmerk van een niet-lineair element is dus dat de overdracht afhankelijk is van de grootte van hetingangssignaal.

Men kan ook niet spreken over de stabiliteit of de nauwkeurigheid van een niet-lineair systeem, wel over de eigenschappen van het systeem bij een gegeven amplitude van hetingangssignaal van het niet-lineaire (deel)systeem.

In figuur 5 is een aantal in de praktijk veelvuldig voorkomende niet-lineariteiten weergegeven.



**Figuur 5** Praktische niet-lineariteiten

Meestal is een niet-lineariteit een verschijnsel dat inherent is aan het beschouwde deelsysteem of element. Soms wordt echter opzettelijk een niet-lineariteit in het (geregelde) systeem aangebracht, bijvoorbeeld in de vorm van een goedkope aan/uit-regelaar.

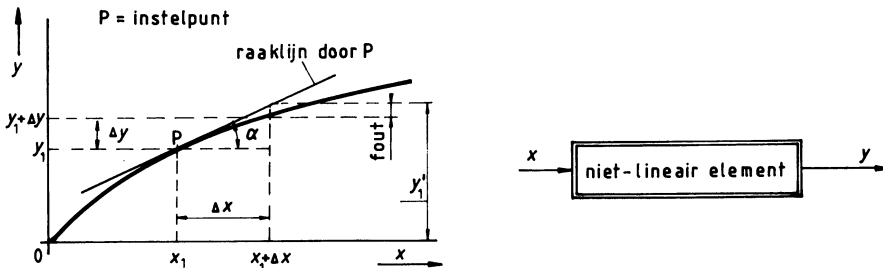
### 3 Linearisering door differentiëren

Voor de regeltechniek is het meestal van belang vooral de dynamische systeemeigenschappen, zoals stabiliteit, te onderzoeken. We moeten dan de stap- of impulsresponsie bepalen, waardoor de overgang van de ene statische toestand naar de andere statische toestand zichtbaar wordt. Hieruit volgt het dynamisch model.

Om het rekenwerk bij analyse en/of ontwerp van een regelsysteem te vereenvoudigen, tracht men vrijwel altijd te komen tot een lineair mathematisch model. Op het gelineariseerde model dat dan ontstaat, kunnen de gebruikelijke technieken zoals Laplace-transformatie, poolbanen enzovoort worden toegepast.

De bekendste methode van systeemlinearisatie is differentiatie van de functie die het niet-lineaire verband aangeeft tussen de in- en uitgang van het beschouwde element. De linearisatie geschiedt dan in het *instel- of werkpunt*.

Het zal duidelijk zijn dat deze methode slechts toepasbaar kan zijn indien de niet-lineaire functie differentieerbaar is. In figuur 6 is de methode aangegeven.



**Figuur 6** Linearisatie door middel van differentiatie

Uit figuur 6 is af te lezen:

$$y_1 + \Delta y \approx y_1 + \Delta x \cdot \tan \alpha \tag{2}$$

Hieruit volgt voor de overdracht  $\Delta y / \Delta x$ :

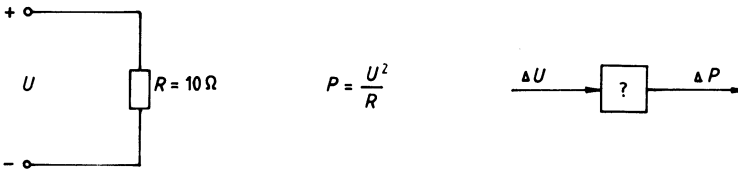
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \tan \alpha = \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=x_1} \tag{3}$$

Door het trekken van een raaklijn door  $P$  aan de kromme ontstaat een benaderde functiewaarde  $y'_1$  van de werkelijke functiewaarde  $y_1 + \Delta y$ . Er treedt in deze benadering een fout op, die groter wordt naarmate de ingangsvariatie  $\Delta x$  groter wordt.

De nauwkeurigheid van het benaderen van de kromme door een rechte door het instelpunt voldoet goed zolang de variaties rond het instelpunt niet te groot zijn. De theoretische berekeningen zullen steeds aan de praktische resultaten getoetst moeten worden.

#### ● Voorbeeld 4

Men wil van een verwarmingsspiraal met ohmse weerstand  $R = 10 \Omega$  het afgegeven vermogen variëren door middel van gelijkspanningsvariatie (zie fig. 7).



**Figuur 7** Vermogensvariatie van een verwarmingsspiraal

De ingestelde spanning  $U$  bedraagt  $U_1 = 50 \text{ V}$ , waardoor het afgegeven vermogen  $P_1 = 250 \text{ W}$  is. Voor het gedissipeerde vermogen  $P$  als functie van de regelspanning  $U$  geldt immers het kwadratische verband:

$$P = \frac{U^2}{R} \quad (4)$$

De vraag is nu wat de vermogensvariaties  $\Delta P$  bedragen ten gevolge van spanningsvariaties  $\Delta U$  van respectievelijk  $5 \text{ V}$  en  $10 \text{ V}$  en hoe groot dan de fout is die door het gebruik van de linearisatie door differentiatie in het instelpunt in de berekening optreedt.

Een variatie  $\Delta P$  ten gevolge van een (kleine) spanningsvariatie  $\Delta U$  bedraagt in het instelpunt  $U_1$ :

$$\frac{\Delta P}{\Delta U} = \left( \frac{dP}{dU} \right)_{U=U_1} = \frac{2U_1}{R} = 10 [\text{W/V}] \quad (5)$$

Er geldt dus:

$$\Delta P = 10 \Delta U \quad (6)$$

Spanningsvariaties van  $5 \text{ V}$  en  $10 \text{ V}$  geven dus vermogensvariaties van respectievelijk  $50 \text{ W}$  en  $100 \text{ W}$ . Volgens formule (4) bedragen de ‘echte’ vermogens respectievelijk:

$$P_{U=55V} = 302,5 \text{ W en: } P_{U=60V} = 360 \text{ W} \quad (7)$$

De ‘echte’ vermogensveranderingen zijn dus respectievelijk 52,5 W en 110 W. Ten opzichte van de ‘benaderde’ veranderingen dus een fout van respectievelijk 5 en 10%. Deze fout is dus, zoals verwacht, bij een grotere variatie  $\Delta U$  groter.

.....

#### 4 De beschrijvende functie van een niet-lineair element

In de vorige paragraaf hebben we gezien dat de systeemoverdracht gelineariseerd kon worden via differentiatie in het instelpunt. Een voorwaarde voor deze procedure is dat de functie die de relatie tussen de in- en uitgang beschrijft differentieerbaar is, in dat instelpunt.

Een techniek waarbij het mogelijk is om ook niet-differentieerbare functies te lineariseren, is de zogenoemde beschrijvende functie methode. Bij deze methode wordt ervan uitgegaan dat het ingangssignaal van het beschouwde niet-lineaire element sinusvormig is.

Indien aan de ingang van een lineair element een sinusvormig signaal wordt aangeboden, zal aan de uitgang van dat element eveneens een sinusvormig signaal ontstaan met dezelfde frequentie. De amplitude en de fase van het uitgangssignaal zullen echter in het algemeen afwijken van die van het ingangssignaal.

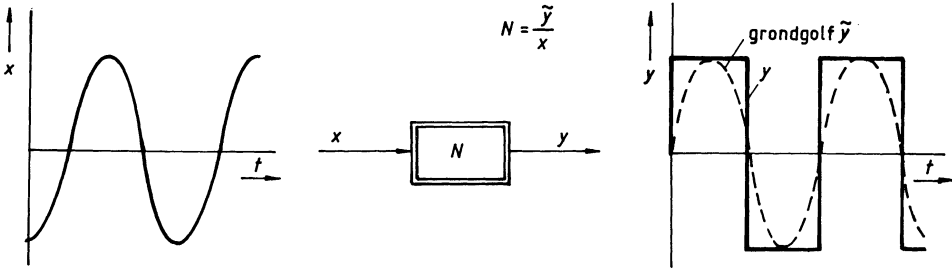
Voor een niet-lineair element geldt dat bij een sinusvormig ingangssignaal in het algemeen een niet-sinusvormig *periodiek* uitgangssignaal zal ontstaan. Dit is een belangrijk kenmerk van een niet-lineair element. Het uitgangssignaal is dan opgebouwd te denken uit een *grondgolf* plus een aantal *hogere harmonischen*.

De basisgedachte bij de beschrijvende functie methode is dat de hogere harmonischen in het uitgangssignaal door het laagdoorlaatkarakter van de rest van het systeem voldoende worden uitgefilterd. Meestal hebben deze hogere harmonischen toch al een kleinere amplitude dan de grondgolf. Hierdoor zijn in vele gevallen slechts de amplitude en fase van de grondgolf van belang bij de bepaling van de overdracht van dat element.

De verhouding tussen de grondgolf  $\tilde{y}$  van het uitgangssignaal  $y$  en het ingangssignaal  $x$  noemt men de beschrijvende functie van het element. Deze beschrijvende functie vertolkt dus een soort overdrachtsfunctie, die men meestal aanduidt met  $N$ . (Zoals later zal blijken, kan  $N$  complex zijn). In figuur 8 is als voorbeeld een blokvormig uitgangssignaal genomen.

Doordat de hogere harmonischen en eventueel een constante in het uitgangssignaal worden verwaarloosd, zullen ten gevolge van de benadering door de beschrijvende functie fouten worden geïntroduceerd. De berekeningen zullen daarom steeds getoetst moeten worden aan de praktische resultaten. Zoals gezegd zullen in de praktijk echter de hogere harmonischen door het laagdoorlaatkarakter van het (geregelde) proces afdoende worden uitgefilterd, zodat de berekeningen meestal voldoende nauwkeurig zijn.

Aan de hand van een eenvoudig voorbeeld zal het opstellen van de beschrijvende functie van een element worden gedemonstreerd.

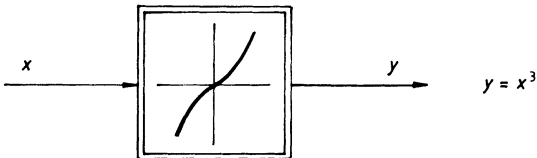


**Figuur 8** Mogelijke sinusresponsie van een niet-lineair element

● **Voorbeeld 5**

In figuur 9 is een niet-lineair element weergegeven, waarvan de relatie tussen ingangssignaal  $x$  en uitgangssignaal  $y$  gegeven is door  $y = x^3$ .

De vraag is nu wat de beschrijvende functie  $N$  van dat element is.



**Figuur 9** Voorbeeld van een niet-lineair element

Stel, het ingangssignaal is  $x = \hat{x} \sin \omega t$ , voor het uitgangssignaal  $y$  geldt dan:

$$y = x^3 = \hat{x}^3 (\sin \omega t)^3 \tag{8}$$

Uitdrukking (8) moet nu worden geschreven als sommatie van een grondgolf en hogere harmonischen. Het gemakkelijkst is dit uit te werken door toepassing van de stelling van Euler:

$$x = \hat{x} \sin \omega t = \frac{\hat{x}}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \tag{9}$$

Het uitgangssignaal  $y$  wordt dan:

$$y = x^3 = \frac{\hat{x}^3}{(2j)^3} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})^3 \tag{10}$$

ofwel:



$$y = \frac{\hat{x}^3}{(2j)^3} \left( e^{3j\omega t} - 3e^{2j\omega t} \cdot e^{-j\omega t} + 3e^{j\omega t} \cdot e^{-2j\omega t} - e^{-3j\omega t} \right) \quad (11)$$

en:

$$y = \frac{\hat{x}^3}{(2j)^3} \left[ -3 \left( e^{j\omega t} - e^{-j\omega t} \right) + \left( e^{3j\omega t} - e^{-3j\omega t} \right) \right] = \frac{\hat{x}^3}{(2j)^2} (-3 \sin \omega t + \sin 3\omega t) \quad (12)$$

De grondgolf is dus:  $y_1 = \frac{3}{4}\hat{x}^3 \sin \omega t$ . Voor de beschrijvende functie geldt dan:

$$N = \frac{y_1}{x} = \frac{\frac{3}{4}\hat{x}^3 \sin \omega t}{\hat{x} \sin \omega t} = \frac{3}{4}\hat{x}^2 \quad (13)$$

en  $N$  is dus afhankelijk van de amplitude van hetingangssignaal!

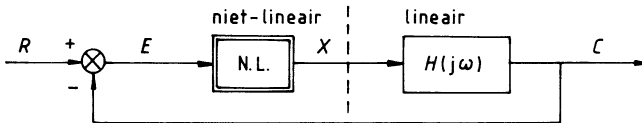
.....

Het zal duidelijk zijn dat de bepaling van de beschrijvende functie, zoals in voorbeeld 5 is gebeurd, niet altijd even gemakkelijk verloopt. Men maakt daarom gewoonlijk gebruik van de uit de wiskunde bekende Fourier-analyse om de grondgolf uit het periodieke uitgangssignaal te bepalen. De behandeling hiervan valt echter buiten het bestek van dit boek.

### 5 Stabiliteitsanalyse in het complexe vlak

De beschrijvende functie methode blijkt goed geschikt te zijn voor de *stabiliteitsanalyse* van niet-lineaire regelsystemen. Omdat deze methode uitgaat van een beschrijving met sinusvormige signalen, ligt het voor de hand de stabiliteit in het frequentiedomein te onderzoeken.

Uitgangspunt bij de analyse is de splitsing van het regelsysteem in een lineair en een niet-lineair deel, zoals in figuur 10 is aangegeven.



**Figuur 10** Algemeen blokschema van een niet-lineair systeem

Voor de beschouwing in het frequentiedomein is het noodzakelijk te beschikken over de overdracht van het totale systeem. Voor deze overdracht  $C/R$  geldt:

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{NH(j\omega)}{1 + NH(j\omega)} \quad (14)$$

waarbij  $N$ , zoals wij in paragraaf 4 zagen, in het algemeen een functie van de amplitude  $\hat{E}$  van het ingangssignaal  $E$  is.

In formule (14) geldt voor de oscilleer voorwaarde, omdat de overdracht dan immers oneindig groot wordt:

$$1 + N(\hat{E}) \cdot H(j\omega) = 0 \quad (15)$$

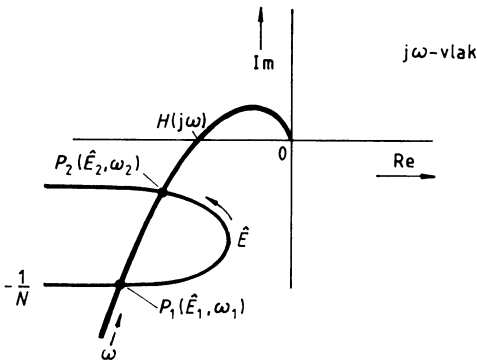
of ook:

$$H(j\omega) = \frac{-1}{N(\hat{E})} \quad (16)$$

Soms wordt het zogenoemde Nyquist-criterium gehanteerd, hetgeen erop neerkomt dat indien de rondgaande systeemoverdracht gelijk aan  $-1$  is, de polaire figuur gaat dan door het punt  $(-1, 0)$ , het geregelde systeem instabiel is.

In het door ons beschouwde niet-lineaire systeem zal de (complexe) overdracht  $H(j\omega)$  niet gelijk aan  $-1$ , maar gelijk aan het 'punt'  $-1/N(\hat{E})$  moeten zijn, opdat dezelfde voorwaarde voor instabiliteit wordt verkregen. In feite is  $-1/N(\hat{E})$  geen 'punt', maar een verzameling van punten in het complexe vlak, afhankelijk van de amplitude  $\hat{E}$ .

Het snijpunt van de grafieken  $H(j\omega)$  en  $-1/N(\hat{E})$  geeft dus in principe de oscilleer voorwaarde voor het geregelde systeem aan. In figuur 11 is hiervan een voorbeeld gegeven.



**Figuur 11** Voorbeeld van een afbeelding van een polaire figuur met de oscilleer voorwaarde

De (eventueel) optredende oscillatie noemt men de 'limit cycle' en is geen sinusvormig signaal.

Het probleem doet zich echter voor dat er veelal meer dan één snijpunt van de grafieken  $H(j\omega)$  en  $-1/N(\hat{E})$  is. De vraag is dan welke *limit cycle* blijvend optreedt. Dat is de

zogenoemde stabiele limit cycle. In figuur 11 is de situatie weergegeven waarbij twee snijpunten  $P_1$  en  $P_2$  optreden. We beschouwen eerst het punt  $P_1$ .

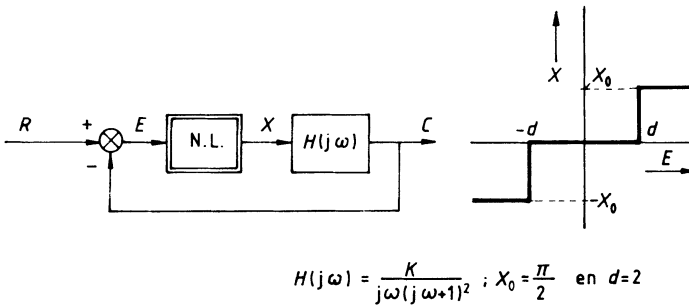
Stel dat het systeem zich in dit *evenwichtspunt*  $P_1$  bevindt en dat door een verstoring de amplitude  $\hat{E}_1$  afneemt; het punt  $P_1$  verschuift dan naar links. Op grond van het *Nyquist-criterium* is het geregelde systeem dan stabiel (ga dit na) en zal de amplitude van de oscillatie verder afnemen. Indien ten gevolge van een verstoring de amplitude van  $\hat{E}_1$  zal toenemen, zal punt  $P_1$  naar rechts verschuiven. Volgens het Nyquist-criterium is het systeem dan instabiel (ga ook dit weer na), waardoor de amplitude verder zal aangroeien tot waarde  $\hat{E}_2$  ! Conclusie: de oscillatie bij  $P_1$  is niet stationair.

We beschouwen vervolgens het punt  $P_2$ . Veronderstel weer dat het systeem zich in het hierbij behorende evenwichtspunt heeft ingesteld en dat ten gevolge van een storing de amplitude van  $\hat{E}_2$  afneemt; het punt  $P_2$  verschuift dan naar rechts. Op grond van het Nyquist-criterium wordt het geregelde systeem dan ‘instabieler’ en zal de amplitude weer aangroeien tot de oorspronkelijke waarde  $\hat{E}_2$ . Indien ten gevolge van een storing de amplitude  $\hat{E}_2$  toenemt, zal punt  $P_2$  naar links verschuiven, waardoor het geregelde systeem volgens Nyquist stabiel wordt, de amplitude neemt dan weer af. Conclusie: de oscillatie bij  $P_2$  is stationair, de frequentie en de amplitude van de slinginging zijn respectievelijk  $\omega_2$  en  $\hat{E}_2$ .

Aan de hand van een voorbeeld wordt nu nagegaan hoe het *stabiliteitsonderzoek* kan verlopen en hoe de *oscillatiefrequentie* en de grootte van het *foutsignaal* kunnen worden bepaald.

● **Voorbeeld 6**

Gegeven is het niet-lineaire regelsysteem volgens figuur 12, waarbij het niet-lineaire element een dode zône bevat en het lineaire gedeelte uit een zuivere integrator in serie met twee gelijke eerste-ordesystemen bestaat.



**Figuur 12** Niet-lineair regelsysteem van voorbeeld 6

Voor de beschrijvende functie  $N$  van dit niet-lineaire element blijkt te gelden:

$$N = \frac{4X_0}{\pi \hat{E}} \sqrt{1 - \frac{d^2}{\hat{E}^2}} \tag{17}$$

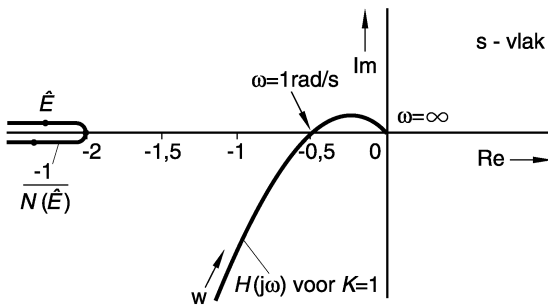
Met  $X_0 = \frac{1}{2}\pi$  en  $d = 2$  volgt hieruit voor  $-1/N$  :

$$\frac{-1}{N(\hat{E})} = \frac{-1}{\frac{2}{\hat{E}}\sqrt{1 - \frac{4}{\hat{E}^2}}} \quad (\text{is reëel!}) \quad (18)$$

en voor de maximale waarde geldt:

$$\frac{-1}{N_{\max}} = -2 \quad \text{voor: } \hat{E} = 2\sqrt{2} \quad (19)$$

In figuur 13 is de grafiek  $-1/N(\hat{E})$  geschetst (ga dit na), alsmede de polaire figuur van  $H(j\omega)$  voor  $K = 1$ . In feite loopt de grafiek van  $-1/N(\hat{E})$  over de reële as, maar voor de duidelijkheid van de uitleg is deze naast deze as getekend.



**Figuur 13** Polaire figuren bij voorbeeld 6

Uit de afbeeldingen van  $-1/N(\hat{E})$  en  $H(j\omega)$  blijkt dat het systeem gaat oscilleren voor  $K = 4$ , met een hoekfrequentie  $\omega = 1$  rad/s en een amplitude  $\hat{E} = 2\sqrt{2}$  (ga deze waarde na). We vragen ons vervolgens af met welke frequentie en amplitude het systeem oscilleert voor  $K = 8$ . In figuur 14 is deze situatie aangegeven.

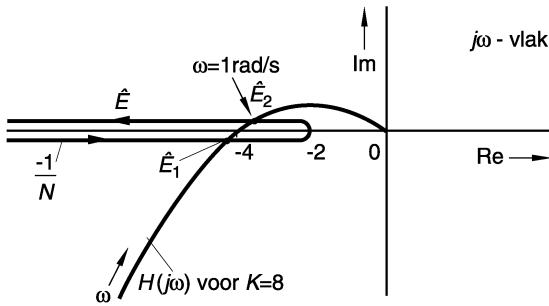
Op grond van de voorgaande beschouwingen treedt een stabiele limit cycle op bij het punt met de grootste amplitude  $\hat{E}$ , namelijk  $\hat{E}_2$ . De hoekfrequentie is dan weer  $\omega = 1$  rad/s.

Voor de bepaling van  $\hat{E}_2$  stellen we:

$$H(j1) = -\frac{1}{N} \quad (20)$$

Hieruit volgt:

$$-4 = \frac{-1}{\frac{2}{\hat{E}}\sqrt{1 - \frac{4}{\hat{E}^2}}} \quad (21)$$



**Figuur 14** Polaire figuren voor  $K = 8$

hetgeen resulteert in de vergelijking:

$$\hat{E}^4 - 64\hat{E}^2 + 256 = 0 \tag{22}$$

Er volgt dan:  $\hat{E}_{1,2}^2 = 32 \pm 16\sqrt{3}$  en daarmee  $\hat{E}_1 = 2$  en  $\hat{E}_2 \approx 7,7$ . De stabiele limit cycle heeft dus een amplitude  $\hat{E}_2 \approx 7,7$ .

.....

De behandelde systeemanalyse van niet-lineaire systemen is één van de meest bruikbare methoden ter bepaling van de stabiliteit. Aanbevolen wordt echter zo mogelijk steeds ook gebruik te maken van computersimulaties.

## 6 De fasevlakmethode

De *fasevlakmethode* is een grafische methode ter bestudering van overgangsverschijnselen en stabiliteit van zowel lineaire als niet-lineaire (regel)systemen. De methode is uitsluitend geschikt voor eerste- en tweede-ordsystemen. Theoretisch is het wel mogelijk om hogere-ordsystemen grafisch te analyseren, maar ons voorstellingsvermogen schiet daarbij tekort. Veronderstel dat de beschouwde afhankelijke variabele  $x(t)$  is. Het fasevlak is dan het vlak waarin  $\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$  als functie van  $x$  wordt afgebeeld. Deze functieafbeelding heet de zogenoemde *fasetrajectorie* en is afhankelijk van de begintoestand waarin het systeem zich op  $t = 0$  bevindt. Langs de trajectorie kan de tijd als parameter worden uitgezet.

### ● Voorbeeld 7

Gegeven is de systeemdifferentiaalvergelijking volgens:

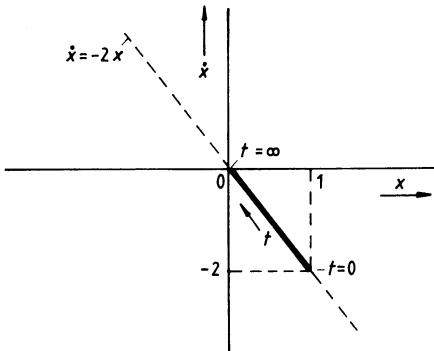
$$\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = 0 \tag{23}$$

Gevraagd wordt de trajectorie  $f(x, \dot{x})$  in het fasevlak te schetsen, indien op  $t = 0$  geldt dat  $x(0) = 1$ .

Uit de differentiaalvergelijking volgens (23) volgt onmiddellijk voor  $\dot{x}$ :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -2x \tag{24}$$

In figuur 15 is deze fase-trajectorie geschetst voor  $x(0) = 1$ .

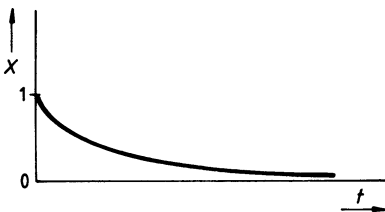


**Figuur 15** Fasetrajectorie

Uit het verloop van de fase-trajectorie kan de tijdresponsie  $x(t)$  worden getekend, uitgaande van de beginsituatie op  $t = 0$ . We zien dat op  $t = 0$  geldt  $\dot{x} = -2$  en  $x = 1$ . Daarna neemt  $\dot{x}$  in positieve richting toe tot 0. Het signaal  $x$  neemt daarbij af van 1 tot 0.

In figuur 16 is het verloop van  $x$  als functie van de tijd getekend; het resultaat stemt overeen met  $x(t) = e^{-2t}$ , zoals ook eventueel volgt uit de oplossing van (23).

Merk op dat  $x$  asymptotisch tot nul nadert, omdat  $\dot{x}$  toeneemt van  $-2$  tot 0.



**Figuur 16** Verloop van  $x(t)$

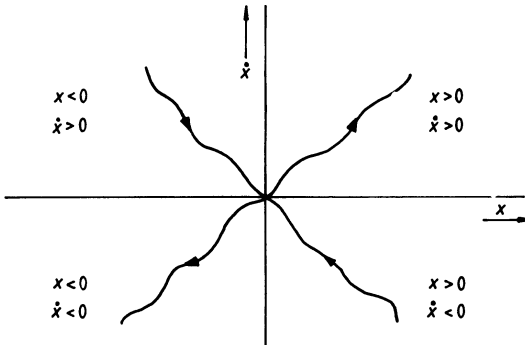
.....

De fase-trajectorie geeft snel een globale indruk van de bijbehorende tijdresponsie. Alvorens hier nader op in te gaan is het noodzakelijk eerst de richting van de trajectorie te analyseren.

In het bovenste halfvlak van het fasevlak is namelijk  $\dot{x} > 0$  (positieve verandering per tijdseenheid), zodat in de tijd  $x(t)$  zal toenemen. Trajectoriën in het bovenste halfvlak worden daarom altijd van links naar rechts doorlopen.

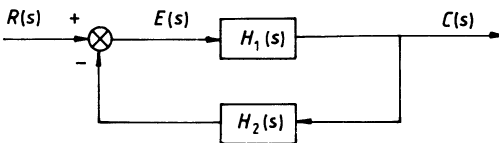
Eenzelfde redenering geldt voor het onderste halfvlak, waar  $\dot{x} < 0$ ;  $x(t)$  zal hier afnemen voor toenemende waarde van de tijd en dus zullen de trajectoriën in het onderste halfvlak altijd van rechts naar links worden doorlopen.

In figuur 17 zijn vier verschillende trajectoriën gegeven; het verloop van de tijd(richting) langs de trajectorie is door middel van een pijl aangegeven.



**Figuur 17** Trajectoriën met bijbehorende richtingen

Met behulp van deze regels is gemakkelijk het globale verloop van de tijdresponsie vanuit de fasetrajectorie na te gaan. Verder dient te worden opgemerkt dat het bij de fasevlaktechnieken gebruikelijk is het foutsignaal  $e(t)$  te beschouwen (zie fig. 18).

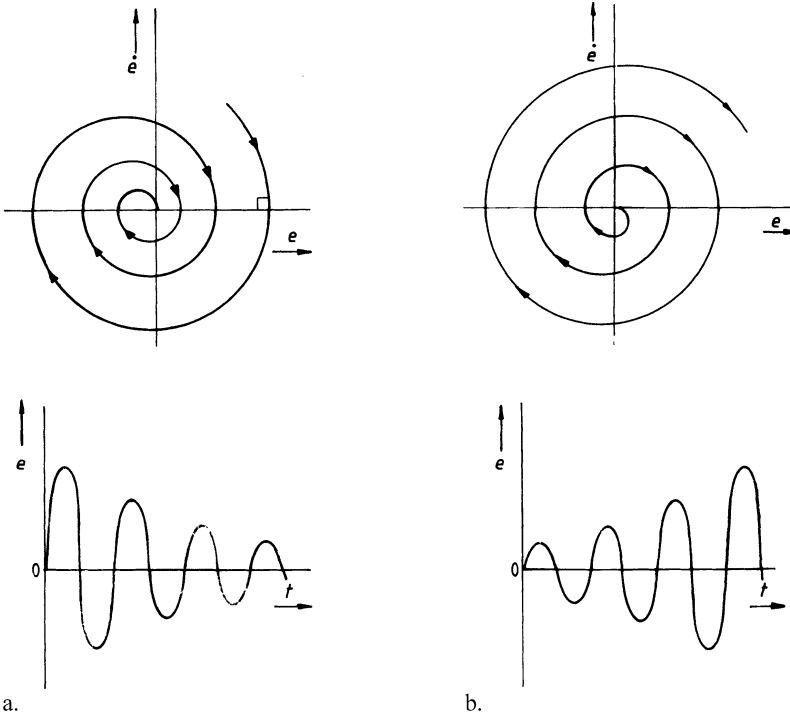


**Figuur 18** Algemeen blokschema van een teruggekoppeld regelsysteem

In de statische toestand (rusttoestand) zal gelden  $e = \dot{e} = 0$ . In het geval van een servosysteem zal  $r(t)$  veranderen en moet  $c(t)$  zo goed mogelijk volgen; in geval van een reguleersysteem moet  $c(t)$  (onder invloed van storingen) zo goed mogelijk constant blijven. In beide gevallen zal bij het overgangverschijnsel (verstoring vanuit de rustpositie) de fasetrajectorie  $f(e, \dot{e})$  in de richting van de oorsprong gaan ( $e = \dot{e} = 0$ ), indien het systeem althans stabiel is.

In figuur 19 is een voorbeeld van twee ogenschijnlijk gelijksoortige fasetrajectoriën weergegeven; de bijbehorende tijdresponsies zijn eveneens geschetst. In het eerste geval zal het oscillatorisch overgangverschijnsel in grootte afnemen; het systeem is hier stabiel. In het

tweede geval zal het beschouwde signaal in grootte toenemen; het systeem is dus instabiel. Ga de richting van beide fasetrajectoriën na op grond van de voorgaande beschouwingen!



**Figuur 19** Fasetrajectoriën van een stabiel (a) en een instabiel (b) systeem

Het tekenen van fasetrajectoriën van hogere-ordsystemen en van niet-lineaire systemen is meestal een ingewikkelde bezigheid. Men kan dan veelal beter een simulatieprogramma gebruiken.

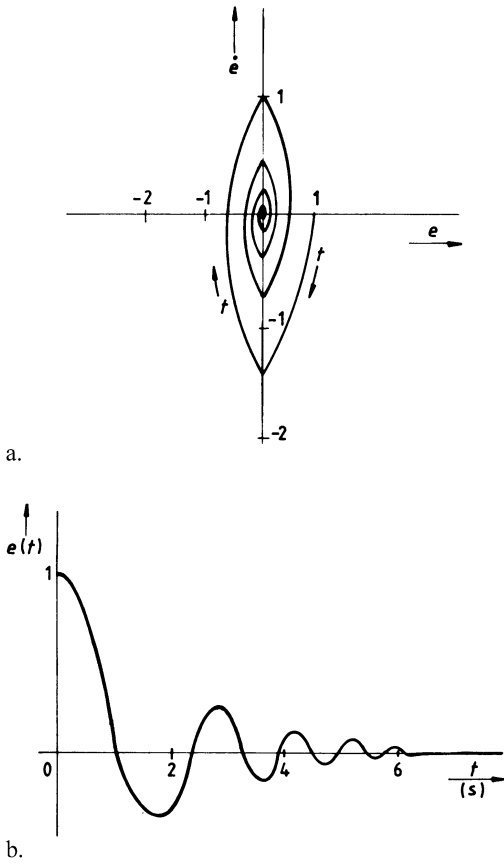
● **Voorbeeld 8**

In figuur 20a is de fasetrajectorie  $f(e, \dot{e})$  getekend van een zogenoemd *aan/uit-geregeld systeem*; op  $t = 0$  gaat  $r$  van 0 naar 1. Hiervoor werd een simulatieprogramma gebruikt.

Figuur 20b geeft het verloop van  $e(t)$  aan. Het niet-lineaire karakter blijkt duidelijk uit de verschillende (afnemende) afstanden op de tijdas tussen de nuldoorgangen van  $e(t)$ ; het signaal is dus niet sinusvormig! Het systeem is wel duidelijk stabiel.

.....





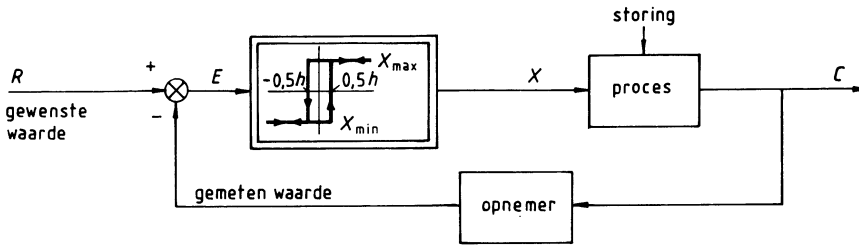
**Figuur 20** Fasetrajectorie (a) en tijdresponsie (b)

### 9 Aan/uit-regelingen

De eenvoudigste en tevens goedkoopste manier van regelen is de zogenoemde *aan/uit-regeling*. Dit is dan ook de reden dat deze regelsystemen veelvuldig worden aangetroffen, onder andere bij thermostaatregelingen zoals bij *centrale-verwarmingsinstallaties*, strijkijzers, boilers enzovoort. Ook meer geavanceerde systemen, zoals raketbesturingen kunnen van deze manier van regelen gebruik maken.

Omdat het stuurorgaan bij deze regelsystemen meestal slechts twee toestanden kent, is de uitvoering daarvan eenvoudig en daardoor relatief goedkoop. In geval het stuurorgaan bestaat uit een (magnetische) klep, zal deze slechts ‘open’ of ‘dicht’ zijn; een elektrische schakelaar als stuurorgaan kent eveneens slechts de toestanden ‘aan’ en ‘uit’.

In figuur 21 is schematisch een aan/uit-regeling weergegeven. Het regelsysteem van deze figuur zou dat van een eenvoudige centrale-verwarmingsinstallatie kunnen zijn.



**Figuur 21** Blokschema van een aan/uit-regeling

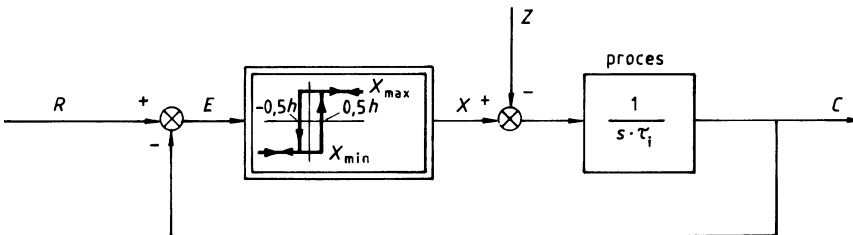
Het stuurorgaan bestaat uit een aan/uit-element met hysteresis  $h$ . De werking van de regeling is als volgt.

Indien de gemeten waarde meer dan  $\frac{1}{2}h$  (zie fig. 21) onder de gewenste waarde komt, zal het stuurorgaan een maximumwaarde  $X_{\max}$  afgeven, waardoor de procesuitgang  $C$  toeneemt. Komt de gemeten waarde meer dan  $\frac{1}{2}h$  boven de gewenste waarde, dan zal het stuurorgaan een minimale waarde  $X_{\min}$  afgeven, waardoor de procesuitgang zal afnemen. In geval van een eenvoudige centrale-verwarmingsinstallatie is  $X_{\min}$  (ketel uit) en  $X_{\max}$  (ketel aan).

Omdat de analyse van een aan/uit-regeling vaak relatief eenvoudig blijkt, is het niet altijd noodzakelijk voor deze analyse gebruik te maken van de beschrijvende functie of van het fasevlak.

### ● Voorbeeld 9

In figuur 22 is het blokschema gegeven van de aan/uit-regeling van een integrerend proces.



**Figuur 22** Aan/uit-regeling van een integrerend proces

Aan de ingang van het proces is een storing  $Z$  werkzaam, die terwille van de eenvoud stapvormig wordt verondersteld. In de regelaar is een hysteresis  $h$  opgenomen. Zoals straks zal blijken, bepaalt die in belangrijke mate het verloop van het uitgangssignaal. De uitgang  $X$  van de regelaar heeft de maximale waarde  $X_{\max}$  (toestand aan) en minimale waarde  $X_{\min}$  (toestand uit).

Wanneer de uitgang  $C$  toeneemt en de waarde  $R + \frac{1}{2}h$  bereikt, zal het foutsignaal  $E = -\frac{1}{2}h$  bedragen, waardoor de uitgang van de regelaar de waarde  $X_{\min}$  krijgt. Het ingangssignaal van het proces (integrator) is dan  $X_{\min} - Z$ . Er geldt dan:

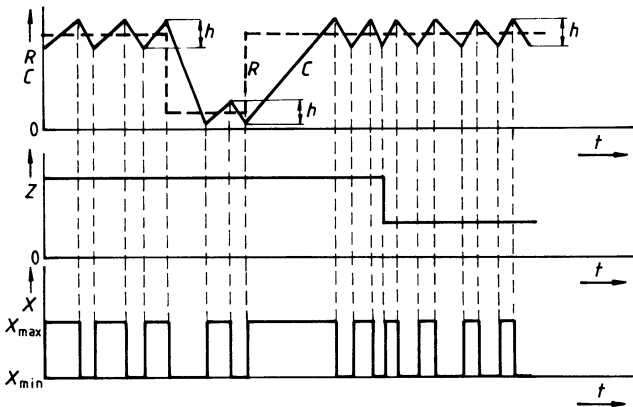
$$C = \frac{1}{\tau_i} \int (X_{\min} - Z) dt = -\frac{1}{\tau_i} \int (Z - X_{\min}) dt \tag{25}$$

Merk op dat voor een goed werkende regeling het hier noodzakelijk is dat de minimale waarde van de regelaaruitgang  $X_{\min}$  kleiner is dan de minimale waarde van de storing  $Z_{\min}$ , anders kan  $C$  immers niet dalen.

Indien nu uitgang  $C$  de waarde  $R - \frac{1}{2}h$  bereikt, zal  $E = +\frac{1}{2}h$  worden, waardoor de regelaaruitgang de waarde  $X_{\max}$  aanneemt. Nu geldt:

$$C = \frac{1}{\tau_i} \int (X_{\max} - Z) dt \tag{26}$$

Ook hier moet, om dezelfde reden als eerder bedoeld, weer gelden dat  $X_{\max}$  groter is dan de maximale waarde van de storing  $Z_{\max}$ . In figuur 23 is een mogelijk signaalverloop van  $R$ ,  $C$ ,  $Z$  en  $X$  als functie van de tijd weergegeven.



**Figuur 23** Mogelijk signaalverloop van de aan/uit-regeling van een integrerend proces

.....

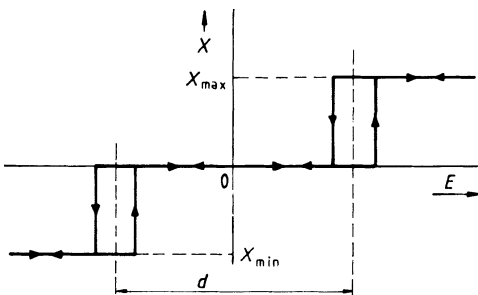
Uit het signaalverloop  $c(t)$  in voorbeeld 9 blijkt dat de zogenoemde *rimpel* in het uitgangssignaal gelijk is aan de grootte van de hysteresis  $h$  in de regelaar. Een grote hysteresis heeft dus een grote rimpel tot gevolg! De rimpel van systemen met looptijd kan echter aanzienlijk groter zijn dan de hysteresis. Het zal duidelijk zijn dat een (te) grote rimpel een ongewenste

situatie teweegbrengt. Denk hierbij aan een grote schommeling in de kamertemperatuur bij een centrale-verwarmingsinstallatie.

Een andere belangrijke grootte is de *schakelfrequentie* van de regelaar. In verband met slijtage en dergelijke mag deze niet te hoog zijn.

Zoals gemakkelijk in te zien is, zal een kleine hysteresis in de regelaar een hoge schakelfrequentie tot gevolg hebben. In de praktijk zal dus een compromis gevonden moeten worden tussen toelaatbare rimpelgrootte en maximale schakelfrequentie.

Een andere manier om de schakelfrequentie te verlagen, is het toepassen van een zogeheten *driestandenregelaar*. Deze regelaar heeft als extra ten opzichte van een tweestandenregelaar de neutrale toestand 0. Dit heeft tot gevolg dat een dode zone in de regelaarkarakteristiek ontstaat. In figuur 24 is dit aangegeven; de dode zone bedraagt hierin  $d$ .



**Figuur 24** Karakteristiek van een driestandenelement

Er ontstaat nu een gebied ( $d$ ) waar het uitgangssignaal van de regelaar gelijk aan nul is. Een nadeel van de toepassing van dit type regelaar is dat de nauwkeurigheid slechter wordt. Een voorbeeld van een dergelijke regeling is de klimaatbeheersing van een ruimte waarbij de regelaar de toestanden ‘verwarming’, ‘koeling’ en ‘nul’ heeft.

## 8 Samenvatting

We hebben gezien dat niet-lineaire systemen een speciale aanpak vereisen, indien deze geregeld moeten worden. Vaak kan echter een niet-lineair systeem in een beperkt instelgebied als lineair worden beschouwd en kunnen we in dat instelgebied vrij gemakkelijk een regeling ontwerpen. Het niet-lineaire karakter zal echter altijd te zien zijn in de responsie. De responsies vertonen niet-sinusvormige componenten.

We kunnen de beschrijvende functiemethode en het fasevlak gebruiken om het geregelde systeem te analyseren.

Er zijn zeer bruikbare simulatieprogramma's beschikbaar, die experimenteren met niet-lineaire systemen gemakkelijk maken. De resultaten hiervan zijn zeer instructief en leiden bovendien snel tot de keuze van een goede regelactie.

## 9 Opgaven

1. Het verband tussen hetingangssignaal  $U$  en het uitgangssignaal  $C$  van een proces in de statische toestand wordt gegeven door de vergelijking:  $C = 4U^3$ .  
Het proces staat ingesteld op  $C = 32$ .  
Bepaal de statische versterking voor kleine signaalvariëaties rond dit instelpunt.
2. Een proces wordt geregeld door een aan/uit-regelaar met hysteresis. Het proces heeft een statische versterking  $K$  en een looptijd van 2 seconden. Voor de regelaar geldt een hysteresis  $h = 2$ , het uitgangssignaal van de regelaar schakelt tussen  $+\frac{\pi}{8}$  en  $-\frac{\pi}{8}$ . Zie voor de beschrijvende functie van de regelaar voorbeeld 9.6.
  - a. Teken de polaire figuren van  $-1/N(\hat{E})$ , waarbij  $N(\hat{E})$  de beschrijvende functie van de regelaar voorstelt.
  - b. Voor welke waarden van  $K$  treedt er geen stationaire limit cycle op?
  - c.  $K = 4$ ; bepaal de optredende limit cycli ( $\hat{E}$  en  $\omega$ ) en teken de polaire figuren waaruit deze blijken.
  - d. Wat valt te verwachten van de nauwkeurigheid van de berekende limit cycli, gezien de aard van dit proces?
3. Een proces wordt geregeld met een aan/uit-regelaar zonder hysteresis. De overbreningsverhouding van het proces is:  $H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2}$ .  
De regelaar schakelt tussen  $+5$  en  $-5$ . Op  $t = 0$  geldt  $e = \dot{e} = 0$  en  $r = 0$ .
  - a. Op  $t = 0$  verandert  $r$  stapvormig van 0 naar 10.  
Bereken de fasetrajectorie  $f(e \cdot \dot{e})$  en schets deze in het  $e\dot{e}$ -vlak.
  - b. Schets het verloop van  $x(t)$  vanaf  $t = 0$ .
4. De temperatuur in een oven kan worden beïnvloed door zowel koeling als verwarming. Bij continue koeling wordt de uiteindelijke temperatuur in de oven  $-10^\circ\text{C}$  en bij continue verwarming zou de temperatuur uiteindelijk oplopen tot  $200^\circ\text{C}$ ; de omgevingstemperatuur is daarbij  $40^\circ\text{C}$ .  
De gewenste oventemperatuur is  $140^\circ\text{C}$ .  
De verwarming en de koeling worden geschakeld door een aan/uit-regelaar met een hysteresis van  $4^\circ\text{C}$ .  
De oven gedraagt zich als een eerste-ordeproces met een looptijd:  $\tau = 20$  seconden en  $T_p = 2$  seconden.
  - a. Teken het blokschema van de regelkring en vul hierin zo veel mogelijk numerieke waarden in.
  - b. Bepaal ongeveer de schakelfrequentie van de regelaar en de grootte van de rimpel op de oventemperatuur.
  - c. Indien het proces geen looptijd zou bevatten, hoe groot wordt dan de rimpel op de oventemperatuur?