

16 Tijd-optimale regelsystemen

16.1 Inleiding

In de moderne regeltechniek wordt steeds meer gebruik gemaakt van *optimale regelcriteria* voor het ontwerpen van systemen. Men tracht hierbij een bepaald *kostencriterium* te minimaliseren. Eén of meer grootheden zoals bijvoorbeeld brandstofverbruik en benodigde tijd moeten dan zo klein mogelijk worden gehouden.

Indien als kostencriterium de *tijd* wordt beschouwd, spreekt men van een *tijd-optimaal regelsysteem*.

Bij de theorieën over continue lineaire systemen komt een dergelijk regelsysteem neer op een aan/uit-regeling, waarbij gedurende bepaalde tijden een (maximaal) positief en negatief stuursignaal aan het systeem wordt aangeboden (Eng. 'bang-bang-control').

Het verschil met de bemonsterde regelsystemen is duidelijk; de stuursignalen voor het proces kunnen slechts op de bemonsteringstijdstippen worden aangeboden, zodat slechts op vaste tijden gestuurd kan worden. Er zijn voor bemonsterde regelsystemen speciale ontwerpmethoden ontwikkeld, waarvan we er één zullen bespreken, namelijk de z.g. '*minimum settling-time control*', ook wel '*dead-beat control*' genaamd.

16.2 'Dead-beat' responsiemethode

Uitgangspunt bij de 'dead-beat' regeling is het blokschema volgens figuur 16.1; de digitale regelaar $D(z)$ moet zodanig worden ontworpen, dat het systeem zo snel mogelijk van de ene naar de andere toestand wordt geregeld. Er dient onderscheid te worden gemaakt tussen *servosystemen* en *regulateursystemen*.

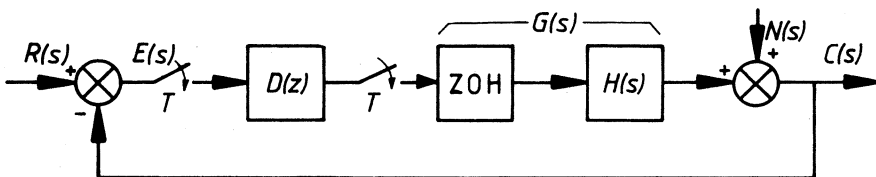


Fig. 16.1 Blokschema procesregeling, waarbij $D(z)$ wordt ontworpen volgens de 'dead-beat' responsiemethode

Bij *servosystemen* (volgsystemen) moet de uitgang $c(nT)$ een ingangsverandering (Δr) zo snel en zo goed mogelijk volgen. De eisen ten aanzien van het regelsysteem zijn daarbij:

- De statische fout $e(\infty)$ moet gelijk aan nul zijn en tevens zo snel mogelijk nul zijn op de bemonsteringstijdstippen, d.w.z. $e(nT) = 0$ voor minimale waarde van n .
- $D(z)$ moet realiseerbaar zijn.

Deze laatste eis lijkt triviaal, maar het zal blijken dat deze eis in belangrijke mate het ontwerp van $D(z)$ bepaalt.

De eerste eis – $e(nT)$ zo snel mogelijk nul – kan anders worden geformuleerd, namelijk:

$$c(nT) = r(nT) \text{ voor minimale waarde van } n \quad (16.1)$$

De overbrengingsfunctie van het geregelde systeem wordt $M(z)$ gesteld, zodat:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = M(z) = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)G(z)} \quad (16.2)$$

Hieruit volgt na 'omwerking' voor de regelaar $D(z)$:

$$D(z) = \frac{M(z)}{1 - M(z)} \cdot \frac{1}{G(z)} \quad (16.3)$$

en voor het verschilsignaal $E(z)$:

$$E(z) = R(z) [1 - M(z)] \quad (16.4)$$

In het algemeen zal $M(z)$ een eindige polynoom in z zijn volgens:

$$M(z) = m_0 + m_1 z^{-1} + m_2 z^{-2} + \dots \quad (16.5)$$

Daar elk fysisch systeem meer polen dan nulpunten in de overbrengingsfunctie heeft, zal een ingangsverandering niet direct merkbaar zijn aan de uitgang. In het geval van een bemonsterd systeem zal dit minstens na één bemonsteringsperiode het geval zijn. Hieruit volgt dat m_0 in uitdrukking (16.5) voor $M(z)$ gelijk aan nul moet zijn, zodat:

$$M(z) = m_1 z^{-1} + m_2 z^{-2} + \dots \quad (16.6)$$

Aan de eis dat de uitgang de ingang zo snel mogelijk volgt (*op de bemonsteringstijdstippen!*), wordt voldaan door in formule (16.6) zo min mogelijk termen m_i ($i = 1, 2, \dots$) mee te nemen.

Evenzo zal in het geval dat het te regelen proces een dode tijd gelijk aan k keer de bemonsteringsperiode bevat, pas na kT seconden een uitgangsverandering meetbaar zijn, zodat voor $M(z)$ in uitdrukking (16.6) dan minstens een term z^{-k} moet worden meegenomen.

Volgens de eerste eis (a) moet in ieder geval gelden:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e(nT) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} R(z) [1 - M(z)] = 0 \quad (16.7)$$

Hieruit volgt dat $M(z)$ mede bepaald wordt door $R(z)$! Dit heeft tot gevolg dat volgens formule (16.3) $D(z)$ eveneens door $R(z)$ bepaald wordt. Deze consequentie, namelijk dat het ontwerp van regelaar, $D(z)$, afhankelijk is van het ingangssignaal, is één van de nadelen van de 'dead-beat' regeling.

Een bijzonder geval treedt op indien de ingang *stapvormig* verandert; voor $e(\infty)$ geldt dan (formule (16.4) en $R(z) = \frac{z}{z-1}$):

$$e(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \cdot \frac{z}{z-1} [1 - M(z)] = 0 \quad (16.8)$$

of:
$$\lim_{z \rightarrow 1} [1 - M(z)] = 0 \quad (16.9)$$

Dit wordt bereikt door voor $M(z)$ te kiezen:

$$M(z) = \frac{1}{z^n} \quad (16.10)$$

Hierbij zijn dus $m_n = 1$ en $m_i = 0$, voor $i \neq n$.

Het uitgangssignaal is dus (op de bemonsteringstijdstippen!) eveneens een stapvormig signaal, echter verschoven over nT seconden. Het geregelde systeem heeft dan een n -voudige pool in de oorsprong van het z -vlak!

Substitutie van (16.10) in (16.3) levert dan voor de regelaar $D(z)$:

$$D(z) = \frac{z^{-n}}{1 - z^{-n}} \cdot \frac{1}{G(z)} = \frac{1}{z^n - 1} \cdot \frac{1}{G(z)} \quad (16.11)$$

Uit het voorgaande en de voorbeelden in de volgende paragraaf blijkt dat de minimale waarde van n in uitdrukking (16.10) en (16.11), bepaald wordt door de dode tijd in het te regelen proces.

Voor andere ingangssignalen is $M(z)$ aanzienlijk lastiger te bepalen. Neem bijvoorbeeld voor het ingangssignaal een 'ramp-sigitaal'; hiervoor is:

$$R(z) = \frac{zT}{(z-1)^2} \quad (16.12)$$

Dan moet voor $e(\infty)$ weer gelden:

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} R(z) [1 - M(z)] = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \cdot \frac{zT}{(z-1)^2} [1 - M(z)] = \\ &= T \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{z-1} [1 - M(z)] = 0 \end{aligned} \quad (16.13)$$

Om dit te bereiken moet de term $1 - M(z)$ minstens een factor $(z-1)^2$ bevatten. Van $M(z)$ moeten dan minstens 2 termen worden meegenomen. Stel gemakshalve dat de dode tijd in het te regelen proces gelijk aan nul is en kies voor $M(z)$:

$$M(z) = m_1 z^{-1} + m_2 z^{-2} \quad (16.14)$$

dan moet dus gelden:

$$1 - M(z) = f(z) (z - 1)^2 \quad (16.15)$$

$$\text{of:} \quad 1 - \frac{m_1 z + m_2}{z^2} = f(z) (z^2 - 2z + 1) \quad (16.16)$$

$$\text{met} \quad \lim_{z \rightarrow 1} f(z) = \text{constante} \quad (16.17)$$

$$\text{Hieruit volgt:} \quad \frac{z^2 - m_1 z - m_2}{z^2} = f(z) (z^2 - 2z + 1)$$

Kies voor $m_1 = 2$ en $m_2 = -1$ zodat:

$$M(z) = 2z^{-1} - z^{-2} \quad (16.18)$$

Dit geeft dus een ingewikkelder verband tussen de in- en uitgang van het systeem weer dan in het geval van een stapresponsie. Uit de formules (16.18) en (16.3) is dan weer $D(z)$ te bepalen.

Bij een *regulateursysteem* moet de uitgang $c(nT)$ zo goed mogelijk *constant* worden gehouden, onder invloed van een storing N welke in het blokschema van figuur 16.1 op de uitgang aangrijpt. Er moet dan gelden:

a $c(nT) = 0$, voor minimale waarde van n . Hierbij is $r = 0$ gesteld.

b $D(z)$ moet realiseerbaar zijn.

Indien de overbrengingsfunctie van het stoorgedrag $\frac{C(z)}{N(z)} = M'(z)$ en de te ontwerpen regelaar $D'(z)$ wordt gesteld, geldt ($R(z) = 0$):

$$\frac{C(z)}{N(z)} = M'(z) = \frac{1}{1 + D'(z)G(z)} \quad (16.19)$$

$$\text{of:} \quad D'(z) = \frac{1 - M'(z)}{M'(z)} \cdot \frac{1}{G(z)} \quad (16.20)$$

Voor $M'(z)$ en $D'(z)$ gelden soortgelijke beschouwingen als bij de servosystemen. Een vergelijking met formule (16.3) toont aan dat $M'(z) = 1 - M(z)$.

16.3 Toepassingen

Aan de hand van twee voorbeelden zal de 'dead-beat' responsiemethode nader worden toegelicht.

Voorbeeld 16.1

Gegeven:

Het blokschema volgens fig. 16.2; $T = 1$ seconde.

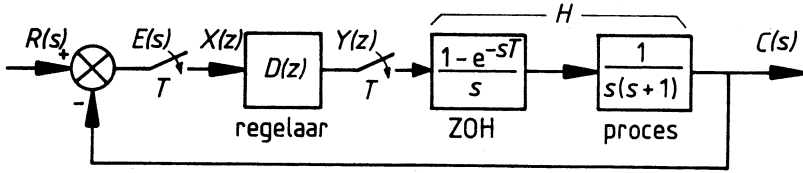


Fig. 16.2 Blokschema behorende bij voorbeeld 16.1

Ingang R verandert stapvormig. Gevraagd wordt $D(z)$ te ontwerpen volgens de 'dead-beat' responsiemethode. Er moet daarbij worden voldaan aan de volgende eisen:

- $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ of $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} E(z) = 0$.
- $c(nT) = r(nT)$ of $C(z) = z^{-n} R(z)$, voor minimale waarde van n .
- $D(z)$ moet realiseerbaar zijn.

Oplossing:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{D(z)H(z)}{1 + D(z)H(z)} = z^{-n} \quad (16.21)$$

dus $D(z)H(z) = z^{-n} + z^{-n} D(z)H(z)$

Hieruit volgt $D(z) = \frac{z^{-n}}{1 - z^{-n}} \cdot \frac{1}{H(z)}$

of $D(z) = \frac{1}{(z^n - 1)H(z)} \quad (16.22)$

Voor $H(z)$ geldt:

$$\begin{aligned} H(z) &= \mathcal{Z} \left[\frac{1 - e^{-sT}}{s} \cdot \frac{1}{s(s+1)} \right] \\ &= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{1}{s^2 (s+1)} \right] \\ &= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} \right] \\ &= \frac{z-1}{z} \left[\frac{zT}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-e^{-T}} \right] \\ &= \frac{z(T + e^{-T} - 1) - Te^{-T} - e^{-T} + 1}{(z-1)(z - e^{-T})} \end{aligned} \quad (16.23)$$

Met $T = 1$ en $e^{-1} \approx 0,37$ volgt dan:

$$H(z) = \frac{0,37z + 0,26}{(z - 1)(z - 0,37)} \quad (16.24)$$

Substitutie in formule (16.22) geeft:

$$D(z) = \frac{(z - 1)(z - 0,37)}{(z^n - 1)(0,37z + 0,26)}$$

Omdat $D(z)$ realiseerbaar moet zijn (orde teller \leq noemer), kan voor n de waarde 1 worden gekozen. Hierdoor wordt $D(z)$:

$$D(z) = \frac{(z - 1)(z - 0,37)}{(z - 1)(0,37z + 0,26)} = \frac{z - 0,37}{0,37z + 0,26}$$

of

$$D(z) = \frac{1 - 0,37z^{-1}}{0,37 + 0,26z^{-1}} \quad (16.25)$$

Realisatie van $D(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ levert:

$$0,37Y(z) + 0,26z^{-1} Y(z) = X(z) - 0,37z^{-1} X(z) \quad (16.26)$$

In het tijddomein levert dit met behulp van de verschuivingsregel:

$$0,37y(nT) + 0,26y(nT - T) = x(nT) - 0,37x(nT - T)$$

of

$$y(nT) = 2,72x(nT) - x(nT - T) - 0,71y(nT - T) \quad (16.27)$$

Het realisatieschema (directe programmering) van formule (16.27) is aangegeven in fig. 16.3.

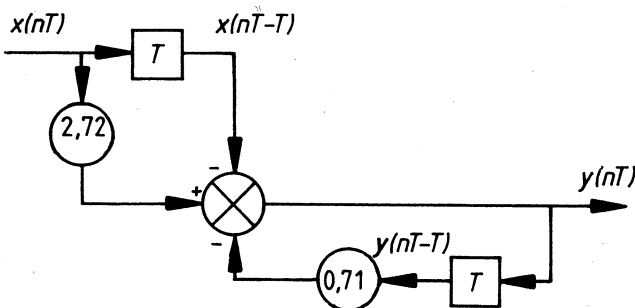


Fig. 16.3 Realisatieschema van de digitale regelaar van voorbeeld 16.1

Met de keuze $n = 1$ en de daaruit volgende overbrengingsfunctie $D(z)$ wordt:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = z^{-1} \quad (16.28)$$

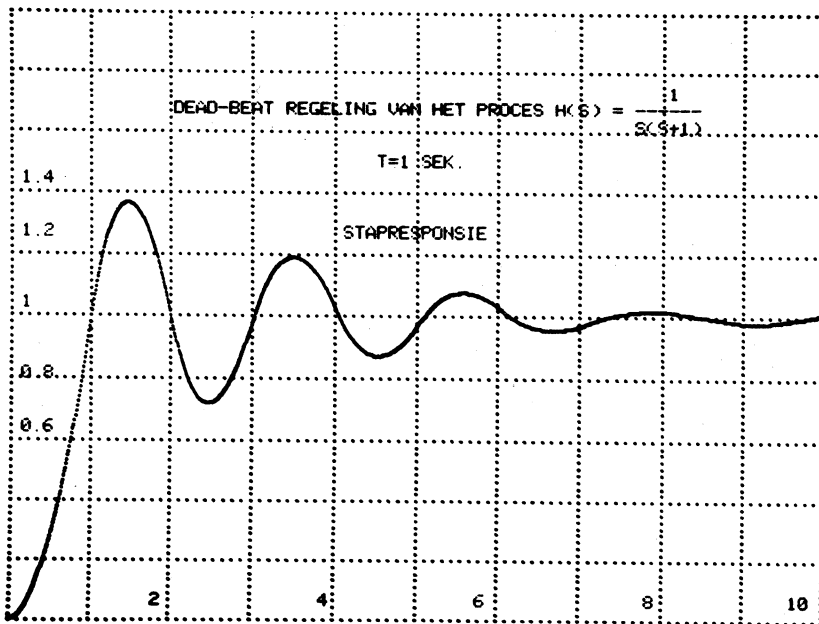


Fig. 16.4 Responsie van $c(t)$ met 'dead-beat' regeling en stapvormige ingang

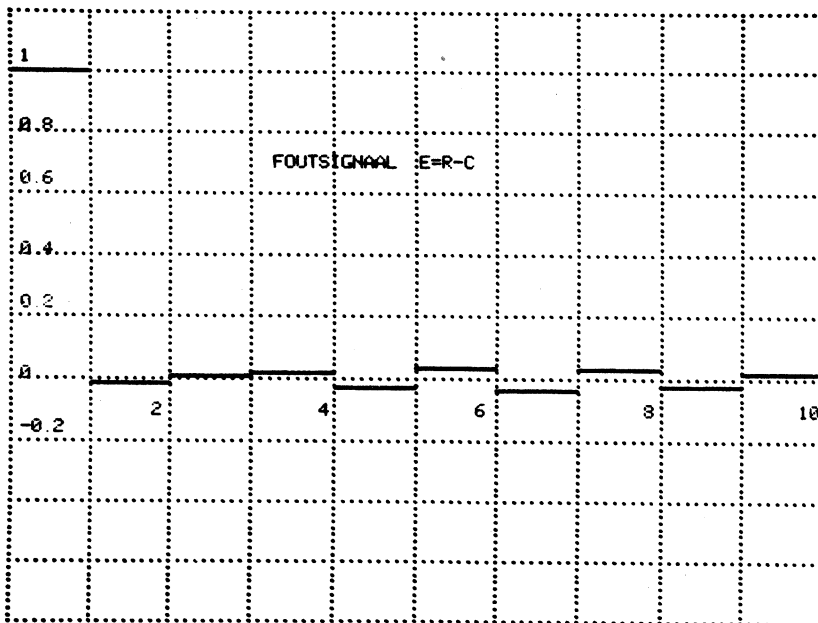


Fig. 16.5 Responsie van $e(t)$ met 'dead-beat' regeling en stapvormige ingang

De uitgang $c(nT)$ zal de ingang $r(nT)$, indien dit een stap is, volgen na één bemonsteringsperiode T , althans op de bemonsteringstijdstippen.

Voor $E(z)$ geldt:

$$E(z) = R(z) - C(z) = R(z) - z^{-1} R(z) = (1 - z^{-1}) R(z) \quad (16.29)$$

Aangezien $r(t)$ een eenheidsstap is, geldt $R(z) = \frac{z}{z-1}$ zodat:

$$E(z) = \frac{z-1}{z} \cdot \frac{z}{z-1} = 1 \quad (16.30)$$

Het foutsignaal $e(nT)$ zal dus gedurende de eerste bemonsteringsperiode de waarde 1 hebben en daarna gelijk aan nul zijn.

De responsies $c(t)$ en $e(t)$ zijn in fig. 16.4 resp. 16.5 weergegeven.

Merk op dat de uitgang na één bemonsteringsperiode (1 seconde) inderdaad op de bemonsteringstijdstippen gelijk aan 1 is. Door afrondingsfouten ($e^{-1} = 0,367879 \dots$) gebeurt dit niet exact.

Let ook op de z.g. 'intersample-ripple' tussen de bemonsteringstijdstippen!

Voorbeeld 16.2

Gegeven wordt het geregelde proces volgens fig. 16.6; T is weer 1 seconde.

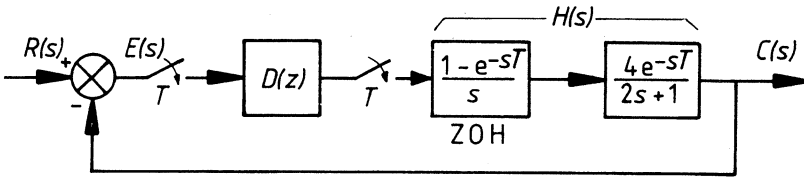


Fig. 16.6 Blokschema van voorbeeld 16.2

We beschouwen weer de stapresponsie; $D(z)$ wordt:

$$D(z) = \frac{1}{(z^n - 1)H(z)} \text{ voor minimale waarde van } n. \quad (16.31)$$

Er geldt:

$$\begin{aligned} H(z) &= \mathcal{Z} \left[\frac{1 - e^{-sT}}{s} \cdot \frac{4e^{-sT}}{2s + 1} \right] \\ &= 4(1 - z^{-1})z^{-1} \mathcal{Z} \left[\frac{1}{s(2s + 1)} \right] \\ &= \frac{4(z-1)}{z^2} \mathcal{Z} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{2}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{4(z-1)}{z^2} \cdot \left[\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T/2}} \right] \\
 &= \frac{4(1-e^{-\frac{1}{2}T})}{z(z-e^{-\frac{1}{2}T})}
 \end{aligned}
 \tag{16.32}$$

Met $T = 1$ en $e^{-\frac{1}{2}} = 0,607$ volgt:

$$H(z) = \frac{1,57}{z(z-0,607)}
 \tag{16.33}$$

Hieruit volgt voor $D(z)$:

$$D(z) = \frac{1}{z^n - 1} \cdot \frac{z(z-0,607)}{1,57}
 \tag{16.34}$$

Omdat $D(z)$ realiseerbaar moet zijn is in dit geval de laagste waarde van n , $n = 2$. Teller en noemer zijn dan beide van de tweede graad.

Na deling door z^2 levert dit voor $D(z)$:

$$D(z) = \frac{1-0,607z^{-1}}{1,57(1-z^{-2})} = \frac{Y(z)}{X(z)}
 \tag{16.35}$$

In het tijddomein geeft dit:

$$1,57y(nT) - 1,57y(nT-2T) = x(nT) - 0,607x(nT-T)$$

of

$$y(nT) = 0,635x(nT) - 0,385x(nT-T) + y(nT-2T)
 \tag{16.36}$$

Het realisatieschema (directe programmering) hiervan is gegeven in fig. 16.7.

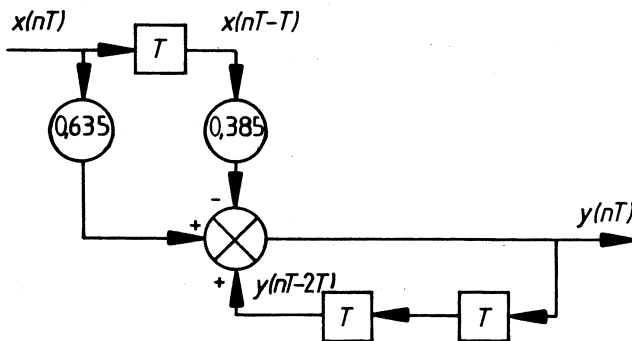


Fig. 16.7 Realisatieschema van de digitale regelaar van voorbeeld 16.2

Met de keuze van $D(z)$ en $n = 2$ wordt nu de overbrengingsfunctie van het geregelde systeem:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = z^{-2} \quad (16.37)$$

In fig. 16.8 is de stapresponsie $c(t)$ weergegeven. Uitgang $c(nT)$ volgt pas na twee bemonsteringsperioden (2 seconden) de ingang op de bemonsteringstijdstippen. Ook hier gebeurt dat volgen ten gevolge van afrondingsfouten niet exact. Er treedt hier *geen* 'intersample-ripple' op.

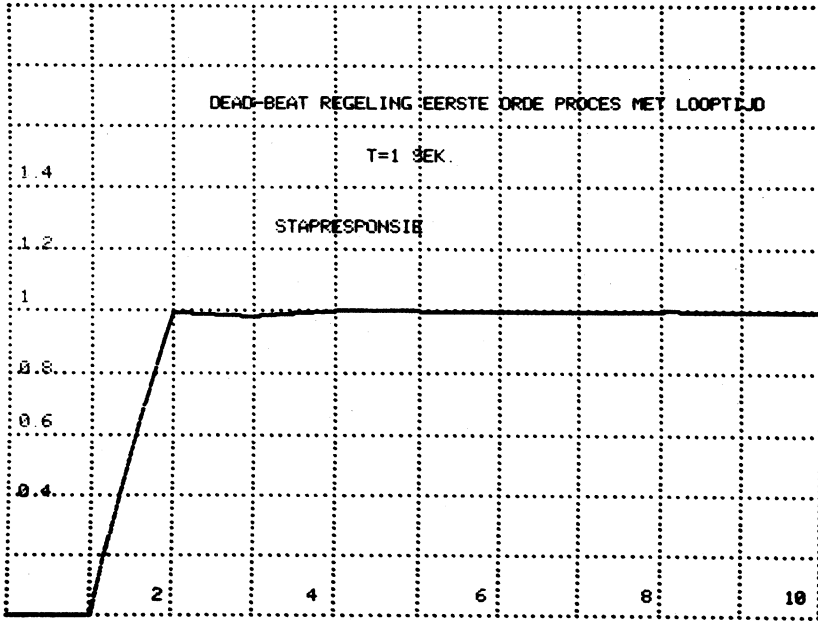


Fig. 16.8 Stapresponsie van het 'dead-beat' geregelde systeem volgens voorbeeld 16.2

16.4 Beoordeling van 'dead-beat' regelingen

Hoewel 'dead-beat' regelingen in eerste instantie goed lijken te functioneren indien de tijd als kostenfactor wordt beschouwd, kleven er toch een aantal bezwaren aan de methode, waardoor deze tegenwoordig minder populair is.

Uit de vorige paragraaf is gebleken dat de te ontwerpen regelaar $D(z)$ niet alleen afhankelijk is van de proceseigenschappen, maar tevens een functie is van de aard van de ingang en/of het stoorsignaal.

Het ontwerp van $D(z)$ is tevens afhankelijk van de 'sample'-tijd T en *gevoelig voor parametervariëaties* in het proces. Immers, uit (16.3) blijkt dat in $D(z)$ de reciproke overbrengingsfunctie van het proces voorkomt ($1/G(z)$). Dit houdt in dat de nulpunten van $G(z)$, de polen van $D(z)$ en de polen van $G(z)$, nulpunten van $D(z)$ worden. Een variatie in een pool en/of nulpunt van $G(z)$ zal dus het effect van de 'dead-beat' regeling nadelig beïnvloeden (onder meer niet meer exact volgen op de bemonsteringstijdstippen).

Doordat $D(z)$ als polen de nulpunten van $G(z)$ heeft, zal in het algemeen na terugkoppeling een oscillatorisch verloop in het stuursignaal optreden. De houdschakeling zorgt er voor dat dit bovendien een pulsvormig karakter vertoont. Doordat deze stuursignalen op

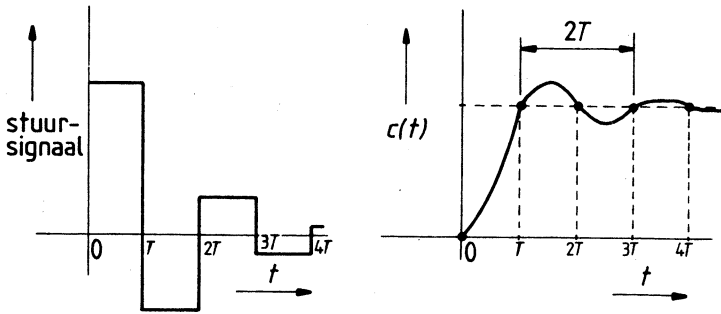


Fig. 16.9 Optreden van 'intersample-ripple' in het uitgangssignaal

de bemonsteringstijdstippen veranderen, zal de frequentie in het uitgangssignaal *de helft van de bemonsteringsfrequentie* zijn. In figuur 16.9 is dit aangegeven.

De optredende oscillatie in het uitgangssignaal *tussen* de bemonsteringstijdstippen noemt men 'intersample-ripple'; het is ook één van de nadelen van de 'dead-beat' regeling. Merk op dat het uitgangssignaal op de bemonsteringstijdstippen, $c(nT)$, *geen* oscillatie vertoont. Een mogelijkheid om de 'intersample-ripple' te vermijden, is de z.g. 'ripple-free response', hetgeen met behulp van de gemodificeerde z-transformatie wordt bepaald en daardoor buiten het bestek van dit boek valt. De 'intersample-ripple' zelf kan hiermee ook worden onderzocht.

16.5 Opgaven

- 1 Gegeven is het blokschema van een bemonsterd systeem volgens fig. 16.10.

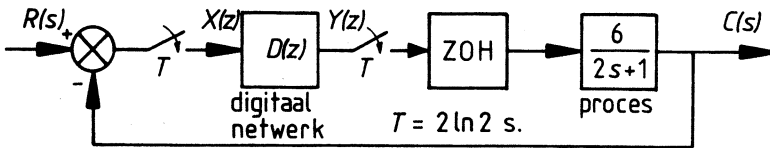


Fig. 16.10 Blokschema van het geregelde systeem van opgave 1

Gevraagd:

Men wil het digitale netwerk $D(z)$ zodanig ontwerpen, dat de uitgang van het systeem – op de bemonsteringstijdstippen – zo snel mogelijk een stapvormige verandering aan de ingang volgt.

- Bepaal de overbrengingsfunctie $D(z)$.
- Maak een realisatieschema van $D(z)$.

- 2 Gegeven is een systeem met z-getransformeerde overbrengingsfunctie:

$$H(z) = \frac{K(3z - 1)}{3(z - 1)(z - \frac{1}{2})}$$

Het systeem wordt één-op-één teruggekoppeld.

Gevraagd:

- a* Maak aan de hand van een poolbaanconstructie duidelijk dat voor een bepaalde waarde van K een 'dead-beat-response' ontstaat.
- b* Bepaal de onder *a* bedoelde waarde van K .
- c* Schets de stapresponsie. Verklaar de 'overshoot' in de responsie.