

13 Analyse en synthese van bemonsterde regelsystemen in het z -domein

13.1 Inleiding

De methoden die worden toegepast voor de beoordeling van het gedrag van systemen met signaalbemonstering zijn in principe dezelfde als die bij de continue systemen. Het zal blijken dat voor het stabiel zijn van een systeem eisen moeten worden gesteld aan de ligging van de polen van dit systeem in het z -domein. Ook bij het ontwerpen van discontinue systemen kan een werkwijze worden gevolgd als eerder toegepast bij het ontwerp van continue systemen. De ontwerpcriteria laten zich vanuit het t - of s -domein 'vertalen' naar het z -domein. Met behulp van de poolbaantheorie, nu toegepast in het z -domein, kunnen dan weer de benodigde regelacties worden bepaald.

13.2 Stabiliteitsonderzoek in het z -domein

We hebben de stabiliteit van een systeem reeds eerder als volgt gedefinieerd:

Een lineair tijdonafhankelijk systeem is stabiel als een eindig ingangssignaal een eindig uitgangssignaal tot gevolg heeft.

Om de stabiliteit van bemonsterde regelsystemen te onderzoeken zijn een aantal methoden in gebruik nl. de *directe* en de *indirecte methoden*. Bij een directe methode wordt, evenals dit werd gedaan bij continue systemen (b.v. Routh-criterium!), direct aan de hand van de totale overbrengingsfunctie van het systeem de stabiliteit beoordeeld. Wij zullen gebruik maken van één indirecte methode, waarbij via het polen- en nulpuntenbeeld in het z -vlak de stabiliteit wordt beoordeeld. Door toepassing van de poolbaantheorie kan daarbij tevens de versterking worden bepaald waarbij het systeem op de rand van instabiliteit verkeert.

Eerst wordt nu afgeleid aan welke voorwaarde het pn-beeld van een systeem moet voldoen opdat het systeem stabiel is. Hiertoe wordt uitgegaan van de z -getransformeerde overbrengingsfunctie $H(z)$ van het systeem. Omdat bij lineaire systemen de stabiliteit onafhankelijk is van de aard van het ingangssignaal kan het stabiliteitsonderzoek ook plaatsvinden bij systemen waarvan de overbrengingsfunctie niet expliciet kan worden bepaald. Beoordeling geschiedt dan aan de hand van de z -getransformeerde van het uitgangssignaal bij *constant* ingangssignaal, immers dan is:

$$C(z) = RH(z) = \mathcal{Z}\{R(s) \cdot H(s)\} = R \cdot \mathcal{Z}\{Hs\} = R \cdot H(z) \quad (13.1)$$

De overbrengingsfunctie van een systeem wordt gegeven door:

$$H(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0} \quad (13.2)$$

met $m \leq n$; en dus ook:

$$C(z) = H(z) \cdot R(z) \quad (13.3)$$

Indien de ingang $R(z)$ eindig is, kan deze worden geschreven als een breuk met eindige teller- en noemerpolynoom, waarbij tevens de hoogste graad van z in de teller hoogstens gelijk is aan de graad (r) van z in de noemer. Aangenomen dat de noemerpolynoom van $H(z)$ enkelvoudige wortels p_i bezit (polen van het systeem), volgt na breuksplitsing:

$$C(z) = \frac{A_1 z}{z - p_1} + \frac{A_2 z}{z - p_2} + \dots = \sum_{i=1}^{n+r} \frac{A_i z}{z - p_i} \quad (13.4)$$

met

- n = aantal polen van $H(z)$,
- r = aantal polen van ingangssignaal $R(z)$,
- p_i = polen van het uitgangssignaal.

Voor meervoudige polen in $H(z)$ geldt bovenstaande uitdrukking niet. De uitsluiting van deze situatie doet echter geen afbreuk aan het volgende betoog. Het 'meenemen' van meervoudige wortels leidt tot een uitgebreidere en minder overzichtelijke afleiding. Na inverse z -transformatie volgt voor de uitgang op de bemonsteringstijdstippen:

$$c(kT) = A_1 p_1^k + A_2 p_2^k + A_3 p_3^k + \dots = \sum_{i=1}^{n+r} A_i p_i^k \quad (13.5)$$

Bij een stabiel systeem is de uitgang eindig, zodat in uitdrukking (13.5) moet gelden:

$$|p_i| < 1 \quad \text{voor } i = 1, 2, 3, \dots, n+r \quad (13.6)$$

In dat geval stelt de uitdrukking voor $C(z)$ volgens (13.4) een *convergente meetkundige reeks* voor. De absolute waarden van de polen p_i moeten dus kleiner dan één zijn. Uit ongelijkheid (13.6) volgt nu de belangrijke conclusie ten aanzien van de stabiliteit van een systeem met signaalbemonstering:

Een lineair tijdonafhankelijk systeem met signaalbemonstering is stabiel, indien alle polen van dat systeem binnen de eenheidscirkel in het z -vlak liggen.

De stabiliteitseis komt overeen met de bekende eis ten aanzien van de stabiliteit van een lineair tijdonafhankelijk *continu* systeem, namelijk dat alle polen van dat systeem in het *linker halfvlak* van het s -vlak moeten liggen.

In fig. 13.1 is deze vergelijking van de twee stabiliteitscriteria aangegeven. In de gearceerde gebieden mogen dus geen polen van het systeem liggen.

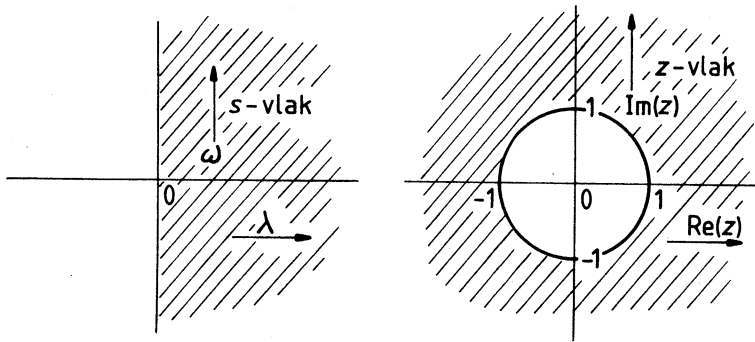


Fig. 13.1 Vergelijking van de verboden gebieden voor polen van een stabiel continu resp. stabiel bemonsterd systeem

Zoals de lezer zelf kan nagaan volgt dezelfde stabiliteitseis uit de overweging dat voor een discontinu systeem de polen van $H^*(s)$ alle in het linker halfvlak moeten liggen terwijl dit gehele deel van het s -vlak door de z -transformatieformule (11.26) wordt afgebeeld binnen de eenheids­cirkel in het z -vlak.

Globale bepaling van het al dan niet stabiel zijn van een bemonsterd systeem met een nulde-orde-houdschakeling voor de reconstructie van het bemonsterde signaal kan plaatsvinden door de benadering van bemonstering en reconstructie door een (extra) looptijd van $\frac{1}{2} T$ (zie ook § 10.7). Indien de polen en nulpunten van het *open* systeem bekend zijn, kan met behulp van een poolbaanconstructie worden nagegaan wanneer het *gesloten* systeem eventueel instabiel wordt voor bepaalde waarden van de rondgaande versterking.

De constructieregels voor het schetsen van een poolbaan van een continu systeem (s -vlak), gelden ook in het z -vlak. Immers, deze constructieregels zijn ontstaan uit de poolbaanvergelijking van het geregelde systeem; of deze vergelijking nu een polynoom in s of in z is, maakt wat betreft de oplossingsmethode niets uit!

Voorbeeld 13.1

Gegeven is het systeem volgens fig. 13.2; we zullen bezien hoe de stabiliteit van dit systeem afhangt van de keuze van de bemonsteringsperiode T .

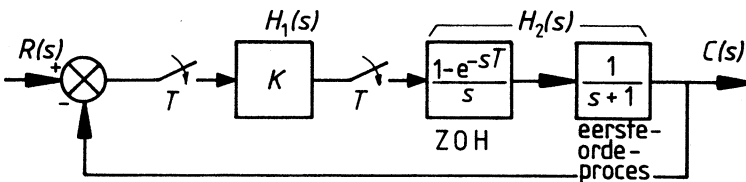


Fig. 13.2 Een proportioneel geregeld eerste-orde-proces met signaalbemonstering

Voor de overbrengingsfunctie geldt:

$$H(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{H_1(z) \cdot H_2(z)}{1 + H_1(z) \cdot H_2(z)} \quad (13.7)$$

met: $H_1(z) = K$ (13.8)

$$\begin{aligned}
 H_2(z) &= \mathcal{Z} \left\{ \frac{1 - e^{-sT}}{s} \cdot \frac{1}{s+1} \right\} \\
 &= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s(s+1)} \right\} \\
 &= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \right\} \\
 &= \frac{z-1}{z} \left\{ \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}} \right\} \\
 &= \frac{1 - e^{-T}}{z - e^{-T}}
 \end{aligned}
 \tag{13.9}$$

Invulling van (13.8) en (13.9) in (13.7) levert:

$$H(z) = \frac{K \frac{1 - e^{-T}}{z - e^{-T}}}{1 + K \frac{1 - e^{-T}}{z - e^{-T}}} = \frac{K(1 - e^{-T})}{z - e^{-T}(1 + K) + K}
 \tag{13.10}$$

De poolbaanvergelijking voor variatie van K wordt:

$$z - e^{-T}(1 + K) + K = 0
 \tag{13.11}$$

of ook:

$$\frac{1 - e^{-T}}{z - e^{-T}} = -\frac{1}{K}
 \tag{13.12}$$

Er is één pool in: $z = +e^{-T}$, dit is het beginpunt van de éne poolbaantak waaruit de poolbaan bestaat. De poolbaan bij variatie van K van 0 tot ∞ is aangegeven in fig. 13.3., tevens is de eenheidscirkel getekend.

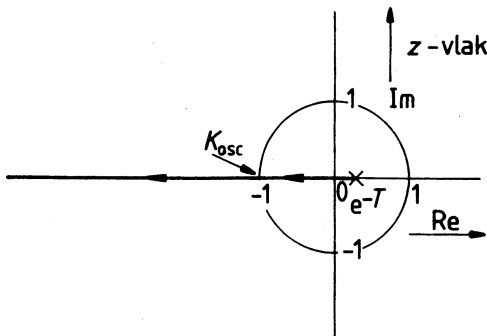


Fig. 13.3 Poolbaan voor variatie van K van 0 tot ∞ van een proportioneel geregeld eerste-orde-proces

Voor $T = 1$ seconde ligt het beginpunt in de pool: $z = e^{-1} \approx 0,368$. Het systeem wordt bij deze waarde van T instabiel als geldt: (zie uitdrukking (13.11))

$$z = e^{-1} (1 + K) - K = -1 \quad (13.13)$$

waaruit volgt: $K_{osc} \approx 2,2$ (13.14)

In het algemeen geldt voor het verband tussen de bemonsteringsperiode T en de versterkingsfactor waarbij het systeem juist gaat oscilleren:

$$e^{-T} (1 + K_{osc}) - K_{osc} = -1$$

of ook:
$$K_{osc} = \frac{1 + e^{-T}}{1 - e^{-T}}$$

In fig. 13.4 is dit verband grafisch aangegeven; zoals te verwachten was wordt de stabiliteit slechter naarmate de bemonsteringsperiode groter wordt.

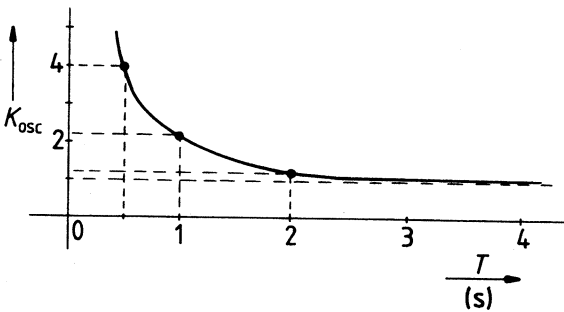


Fig. 13.4 Verband tussen K_{osc} en T

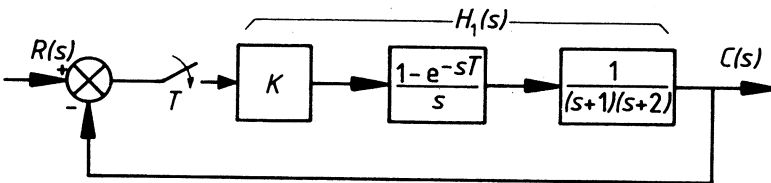


Fig. 13.5 Een proportioneel geregeld tweede-orde-proces met signaalbemonstering.

Voorbeeld 13.2

Gegeven wordt het bemonsterd tweede-orde-systeem volgens fig. 13.5; ook hiervan zullen we bepalen voor welke waarde van K het systeem instabiel wordt en wel voor een bemonsteringsperiode van $T = \ln 2$ seconden.

Voor de overbrengingsfunctie $H(z) = \frac{C(z)}{R(z)}$ geldt:

$$H(z) = \frac{H_1(z)}{1 + H_1(z)} \quad (13.15)$$

met:

$$\begin{aligned}
 H_1(z) &= \mathcal{Z} \left\{ \frac{1 - e^{-sT}}{s} \cdot \frac{K}{(s+1)(s+2)} \right\} \\
 &= K(1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s(s+1)(s+2)} \right\} \\
 &= K(1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{\frac{1}{2}}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{\frac{1}{2}}{s+2} \right\} \\
 &= K(1 - z^{-1}) \left\{ \frac{\frac{1}{2}z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}} + \frac{\frac{1}{2}z}{z-e^{-2T}} \right\} \quad (13.16)
 \end{aligned}$$

Daar $T = \ln 2$ seconden wordt:

$$\begin{aligned}
 H_1(z) &= K \left(\frac{z-1}{z} \right) \left(\frac{\frac{1}{2}z}{z-1} - \frac{z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2}z}{z-\frac{1}{4}} \right) \\
 &= \frac{K(z + \frac{1}{2})}{8(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{4})} \quad (13.17)
 \end{aligned}$$

De poolbaanvergelijking voor variatie van K van 0 tot ∞ wordt daarmee:

$$\frac{(z + \frac{1}{2})}{8(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{4})} = -\frac{1}{K} \quad (13.18)$$

In fig. 13.6 is de poolbaan in het z -vlak aangegeven te samen met de eenheidscirkel.

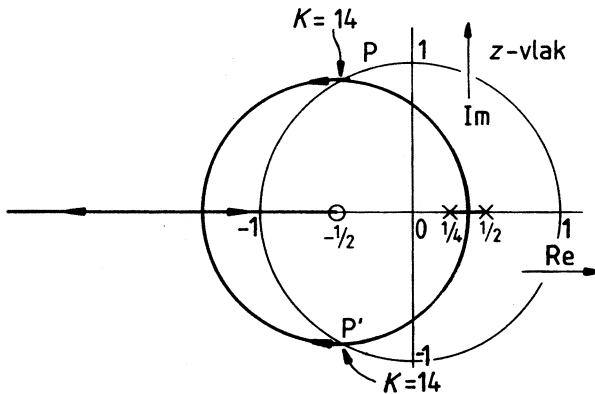


Fig. 13.6 Poolbaan van het bemonsterde tweede-orde-systeem, voor $0 < K < \infty$

Uit deze figuur is te zien, dat het systeem instabiel wordt, indien de poolbaan de eenheids-cirkel snijdt in de punten P en P'. Er zijn dan twee toegevoegd complexe polen $z_{1,2} = a \pm jb$. Uit de poolbaanvergelijking (13.18) volgt:

$$8(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{4}) + K(z + \frac{1}{2}) = 0 \quad (13.19)$$

$$\text{en ook: } 16z^2 + (2K - 12)z + 2 + K = 0 \quad (13.20)$$

De toegevoegd complexe polen $z_{1,2}$ worden gevonden uit vergelijking (13.20):

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{-(2K - 12) \pm \sqrt{(2K - 12)^2 - 64(2 + K)}}{32} = \\ &= \frac{-(2K - 12) \pm j \sqrt{64(2 + K) - (2K - 12)^2}}{32} \triangleq a \pm jb \quad (13.21) \end{aligned}$$

De modulus van deze polen bedraagt: $|z_{1,2}| = \sqrt{a^2 + b^2}$. In de punten P en P' is deze modulus 1, dus:

$$\frac{1}{32} [(2K - 12)^2 + 64(2 + K) - (2K - 12)^2]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \sqrt{2 + K} \equiv 1 \quad (13.22)$$

Hieruit volgt: $K = 14$. De polenzijn dan:

$$z_{1,2} = -\frac{1}{2} (1 \pm j \sqrt{3}) \quad (13.23)$$

Uit de poolbaan van fig. 13.6 blijkt dat het systeem dus voor elke waarde van K groter dan 14 instabiel is.

13.3 Ontwerpcriteria in het z -domein

Het ligt voor de hand om de in het s -domein gedefinieerde criteria van absolute en relatieve demping ook in het z -domein toe te passen. We bezien hiertoe eerst hoe *een lijn van absolute demping* in het s -domein wordt afgebeeld in het z -domein. Voor een dergelijke lijn geldt:

$$s = \lambda_1 + j\omega \quad (13.24)$$

met λ_1 is constant en ω is variabel. Volgens de z -transformatie geldt:

$$z = e^{sT} \quad (13.25)$$

Uit (13.24) en (13.25) volgt dan:

$$z = e^{(\lambda_1 + j\omega)T} \quad (13.26)$$

Voor de modulus van z geldt:

$$|z| = e^{\lambda_1 T} \quad (13.27)$$

Voor het argument van z geldt:

$$\arg z = \omega T$$

Het blijkt dus dat indien in het s -domein een lijn van absolute demping doorlopen wordt,

in het z -domein een cirkel met middelpunt in de oorsprong wordt doorlopen. Voor $\lambda_1 = 0$ is deze cirkel de eenheidscirkel, voor elke waarde van λ_1 waarvoor geldt $\lambda_1 < 0$ wordt een cirkel doorlopen die *binnen* deze eenheidscirkel ligt. Indien in het s -domein een lijn van absolute demping wordt doorlopen van $-\frac{1}{2}\omega_s$ tot $+\frac{1}{2}\omega_s$, dit is alleen dat deel van de beschouwde lijn van absolute demping dat ligt in de z.g. *primaire strook* in het s -domein, dan loopt het argument in het z -domein van:

$$-\frac{1}{2}\omega_s T = -\pi \quad \text{tot} \quad +\frac{1}{2}\omega_s T = +\pi \quad (13.28)$$

Daar bovendien geldt:

$$e^{sT} = e^{sT + j2\pi n} = e^{sT + jn\omega_s T} \quad (13.29)$$

wordt elk deel van een absolute dempingslijn in een secundaire strook op dezelfde cirkel in het z -domein afgebeeld als waarop het deel in de primaire strook wordt afgebeeld. Indien $\lambda_1 = 0$ wordt *de gehele imaginaire as* in het s -domein door de z -transformatie afgebeeld op de eenheidscirkel in het z -domein en het *gehele* linker halfvlak wordt daarbij afgebeeld *binnen* deze eenheidscirkel.

Daar voor de straal van de cirkel met absolute demping λ_1 geldt:

$$R_c = e^{\lambda_1 T} \quad (13.30)$$

en $\lambda_1 < 0$ wordt deze straal kleiner naarmate de absolute demping toeneemt.

Wordt dus een bepaalde minimale absolute demping λ_1 geëist dan moeten alle polen van het geregelde systeem in het z -domein liggen binnen de cirkel met straal $R_c = e^{\lambda_1 T}$ en middelpunt in de oorsprong.

Uit (13.30) volgt direct dat voor een geëiste bepaalde absolute demping λ_1 en toenemende waarde van de bemonsteringsperiode het gebied in het z -vlak waarin de polen mogen liggen kleiner wordt. We kunnen ook zeggen dat bij een vaste waarde van de bemonsteringsperiode de absolute demping groter is naarmate de polen binnen een kleinere cirkel met middelpunt in O liggen.

Voorbeeld 13.3

Gegeven:

Een systeem volgens het blokschema van fig. 13.7a; de bemonsteringsperiode is 0,1 seconde.

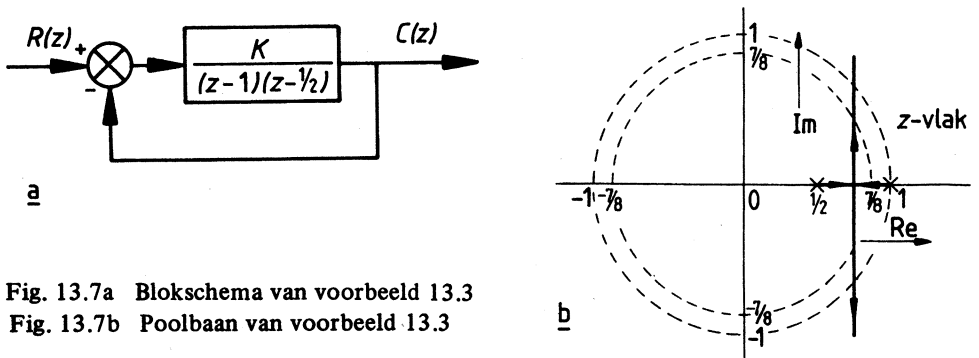


Fig. 13.7a Blokschema van voorbeeld 13.3

Fig. 13.7b Poolbaan van voorbeeld 13.3

Voor welke waarde van K heeft nu dit systeem twee toegevoegd complexe polen die liggen op de cirkel met straal $R_c = \frac{7}{8}$ en wat is daarbij de $t_s(2\%)$?

Oplossing:

Uit de poolbaan van het geregelde systeem (fig. 13.7b) volgt voor de polen:

$$z_{1,2} = \frac{3}{4} \pm j \sqrt{\left(\frac{7}{8}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2}$$

ofwel: $z_{1,2} = 0,75 \pm j 0,45$ (13.31)

De poolbaanvergelijking is:

$$(z - 1) \left(z - \frac{1}{2}\right) + K = 0$$
 (13.32)

Vergelijking van de poolbaanvergelijking volgens (13.32) en die volgend uit (13.31) levert:

$$z^2 - 1,5z + 0,5 + K = 0$$

$$z^2 - 1,5z + (0,75)^2 + 0,45^2 = 0$$

of: $0,5 + K = 0,5625 + 0,2025$

dus: $K = 0,265$ (13.33)

Voor de waarde λT vinden we uit:

$$e^{\lambda T} = 0,875, \quad \text{dus } \lambda T = -0,1335$$
 (13.34)

Daar: $T = 0,1$ seconde is, geldt:

$$\lambda = -1,335$$
 (13.35)

Voor $t_s(2\%)$ moet gelden:

$$e^{\lambda t_s(2\%)} = \frac{1}{50} \text{ of ook: } \lambda t_s(2\%) \approx -4$$

waaruit volgt:

$$t_s(2\%) \approx 3 \text{ seconden}$$
 (13.36)

Voor een lijn van *constante relatieve demping* in het s -domein geldt:

$$\frac{\lambda}{\omega} = \text{constant}$$
 (13.37)

met behulp van de relatieve demping kan de 'overshoot' in een stapresponsie worden bepaald. Er geldt immers:

$$D = e^{\frac{\lambda}{\omega} \pi} \cdot 100\% \quad (13.38)$$

Hoe wordt nu een lijn van constante relatieve demping afgebeeld in het z -domein?

Er geldt:

$$z = e^{sT} = e^{(\lambda + j\omega)T} \quad (13.39)$$

Dus: $|z| = e^{\lambda T} \quad (13.40)$

en $\arg z = \omega T \quad (13.41)$

Voor variërende waarden van $q = \frac{\lambda}{\omega}$ ontstaan in het z -vlak z.g. logaritmische spiralen die binnen de eerdergenoemde eenheidscirkel verlopen. In fig. 13.8 zijn enkele van deze krommen in het z -vlak schetsmatig aangegeven.

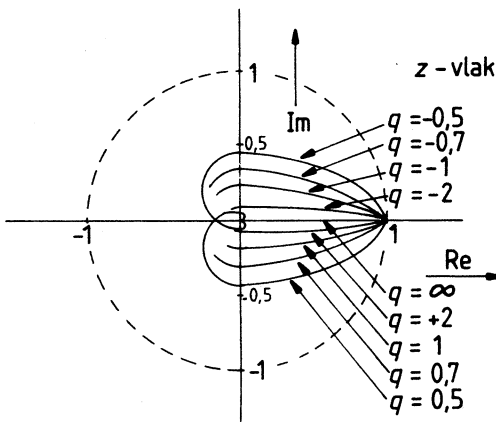


Fig. 13.8 Lijnen van constante relatieve demping in het z -vlak

Het zou mogelijk zijn om een verzameling krommen van constante relatieve demping in het z -vlak aan te geven met parameters q en T . Voor het ontwerp levert dit echter geen gemakkelijk bruikbaar criterium op. Meestal zullen we ons dan ook bepalen tot een werkwijze waarbij ontworpen wordt naar een bepaalde gewenste settling time terwijl daarna wordt gecontroleerd wat daarbij de relatieve demping en de daarbij behorende 'overshoot' in de stapresponsie wordt. Is de 'overshoot' te groot, dan wordt een grotere absolute demping genomen en volgt een nieuwe controle van de 'overshoot'.

Voorbeeld 13.4

Gevraagd:

Bepaal wat de 'overshoot' in de stapresponsie is voor de in voorbeeld 13.3 gevonden instelling van K .

Oplossing:

Voor de twee polen geldt bij $K = 0,265$:

$$z_{1,2} = 0,75 \pm j 0,45$$

Volgens (13.41) wordt daarmee:

$$|z| = e^{\lambda T} = \sqrt{0,75^2 + 0,45^2} = 0,875$$

ofwel: $\lambda T = -0,13$ (13.42)

Verder wordt:

$$\begin{aligned} \arg(z) &= \arctan \frac{0,45}{0,75} = 0,54 = \omega T \\ \text{dus } \frac{\lambda}{\omega} &= \frac{\lambda T}{\omega T} = -\frac{0,13}{0,54} = -0,24 \end{aligned} \quad (13.43)$$

De 'overshoot' wordt hiermee:

$$D = e^{\frac{\lambda}{\omega} \pi} \cdot 100 \approx 47\%$$

13.4 Ontwerp van een proportionele regeling voor een bemonsterd eerste-orde-proces

We gaan uit van een digitaal geregeld eerste-orde-systeem met een tijdconstante van 1 seconde en een gelijkspanningsversterking van 1, zoals schematisch aangegeven in fig. 13.9a. Het 'set point' wordt numeriek in de procescomputer ingevoerd, terwijl de gemeten proceswaarde wordt omgezet door middel van een analoog-digitaal-converter voorafgegaan door een bemonsteringsschakeling. Reconstructie van het in het rekenorgaan berekende stuursignaal van het proces wordt verkregen door een nulde-orde-houdschakeling. Deze wordt gevolgd door een digitaal-analoog-converter. Iedere T seconden wordt de houdschakeling (een digitaal register) voorzien van een nieuw berekende stuurwaarde; T is ingesteld op 0,5 seconde.

In blokschemavorm ziet het geregelde systeem er uit als aangegeven in fig. 13.9b. Zoals reeds in voorbeeld 13.1 is berekend (13.11) geldt voor de poolbaanvergelijking:

$$\frac{1 - e^{-T}}{z - e^{-T}} = -\frac{1}{K}$$

en voor $T = 0,5$ s geldt:

$$\frac{0,393}{z - 0,607} = -\frac{1}{K} \quad (13.44)$$

De poolbaan voor variatie van K van nul tot oneindig ziet eruit als aangegeven in fig. 13.10; tevens is in deze figuur de eenheidscirkel (stabiliteit!) aangegeven.

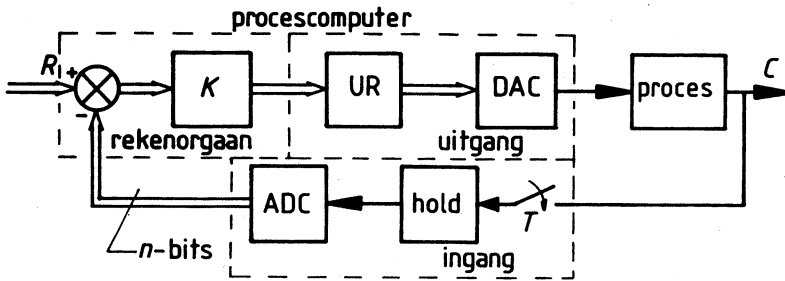


Fig. 13.9a Digitaal geregeld eerste-orde-proces

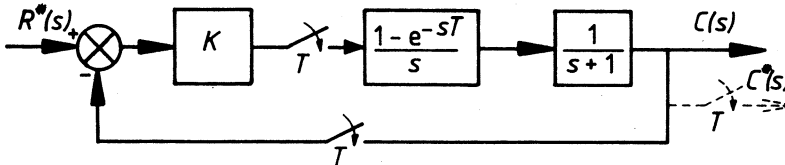


Fig. 13.9b Blokschema van het digitaal geregeld eerste-orde-proces

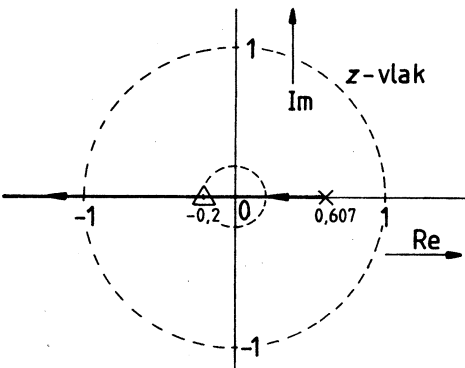


Fig. 13.10 Poolbaan van P-geregeld bemonsterd eerste-orde-proces

Stel nu dat een zodanige instelling van de proportionele versterking geëist wordt dat de 'overshoot' in de stapresponsie maximaal 20% bedraagt; gevraagd wordt daarbij tevens de 'settling time' $t_s(2\%)$ te berekenen.

Voor de bepaling van de 'overshoot' maken we gebruik van de uitdrukkingen (13.40) en (13.41):

$$|z| = e^{\lambda T} \text{ en } \arg(z) = \omega T$$

Voor een 'overshoot' van 20% moet gelden:

$$D = 20\% = e^{\frac{\lambda}{\omega} \pi} \cdot 100\%,$$

waaruit volgt: $\frac{\lambda}{\omega} \approx -0,512$

(13.45)

Zolang de pool op de positief reële as in het z -vlak ligt is er geen 'overshoot' (ga dit na!), de versterkingsfactor kan dus in elk geval zover worden opgevoerd dat de pool op de negatief reële as komt te liggen. Daar geldt dan:

$$\arg(z) = \pi = \omega T \quad (13.46)$$

Met de in (13.45) gevonden waarde van $\frac{\lambda}{\omega}$ wordt dan:

$$\lambda T = \frac{\lambda}{\omega} \cdot \pi \approx -1,61 \quad (13.47)$$

Voor $|z|$ dient dan te gelden:

$$|z| = e^{-1,61} \approx 0,2 \text{ (zie ook fig. 13.10)}$$

De pool mag dan dus liggen in $z = -0,2$; dit resultaat ingevuld in de poolbaanvergelijking (13.44) levert ons:

$$K \approx 2 \quad (13.48)$$

Met $T = 0,5$ seconde vinden we uit (13.47):

$$\lambda \approx -3,22$$

Voor $t_s(2\%)$ geldt:

$$e^{\lambda t_s(2\%)} = \frac{1}{50}, \text{ ofwel:}$$

$$t_s(2\%) \approx 1,2 \text{ seconde} \quad (13.49)$$

Ter controle van de berekende instelling berekenen we vervolgens de stapresponsie van het geregelde systeem met $K = 2$.

Voor de overbrengingsfunctie van het geregelde systeem geldt, zie uitdrukking (13.10):

$$H(z) = \frac{0,8}{z + 0,2} \quad (13.50)$$

De eenheidsstapresponsie wordt daarmee:

$$C(z) = \frac{0,8z}{(z - 1)(z + 0,2)} \quad (13.51)$$

Door breuksplitsing en terugtransformatie of met behulp van de staartdelingsprocedure kan $c(nT)$ worden bepaald; we vinden:

$$\begin{array}{ll} t = 0 & : \quad c(0) = 0 \\ t = 0,5 & : \quad c(0,5) = 0,8 \\ t = 1,0 & : \quad c(1,0) = 0,64 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} t = 1,5 & : \quad c(1,5) = 0,66 \\ t = 2,0 & : \quad c(2,0) = 0,67 \\ t = 2,5 & : \quad c(2,5) = 0,67 \text{ etc.} \end{array}$$

In fig. 13.11 zijn voor enige waarden van K , waaronder $K = 2$, de stapresponsies geplot. Duidelijk is dat de 'overshoot' en de 'settling time' bij $K = 2$ goed overeenstemmen met de berekende waarden.

Een bijzonder geval treedt op als $K = 1,5$; de pool van het teruggekoppelde systeem ligt dan juist in $z = 0$. De overbrengingsfunctie van het systeem luidt dan:

$$H(z) = \frac{0,6}{z} = 0,6z^{-1} \quad (13.52)$$

Dit stelt een tijdvertraging (looptijd) voor ter grootte van T seconden en een versterkingsfactor van 0,6. De stapresponsie stelt wat betreft de waarden op de bemonsteringstijdstippen weer een stap voor, nu echter een periode T verschoven in de tijd. De uitgang $c(nT)$ volgt de ingang, indien deze stapvormig verandert, na één bemonsteringsperiode precies. Deze responsie staat bekend onder de aanduiding 'dead-beat response'; zie fig. 13.11 ($K = 1,5$); we komen hier in hoofdstuk 16 op terug.

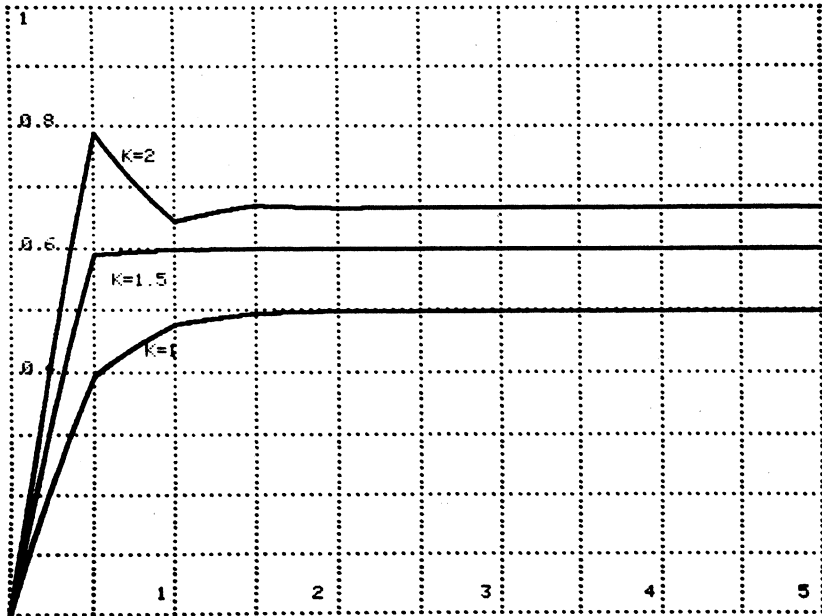


Fig. 13.11 Enkele stapresponsies van het proportioneel geregeld bemonsterd eerste-orde-proces

13.5 Ontwerp van een proportionele regeling voor een bemonsterd tweede-orde-proces

In fig. 13.12 is het blokschema gegeven van een geregeld tweede-orde-proces met signaalbemonstering. Het is in wezen hetzelfde systeem dat in voorbeeld 13.2 werd beoordeeld op het stabiliteitsaspect.

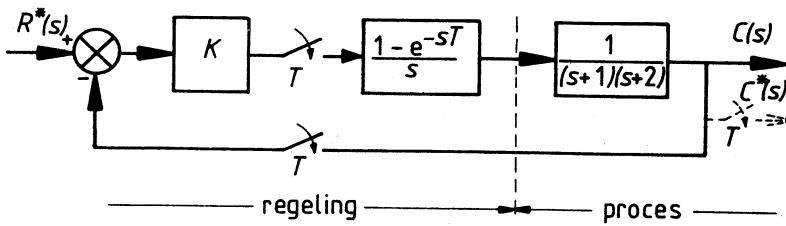


Fig. 13.12 Blokschema van het proportioneel geregeld bemonsterd tweede-orde-proces

We nemen de bemonsteringsperiode $T = \ln 2$ seconden, en zullen hierbij een dusdanige proportionele versterkingsfactor (K) bepalen dat de 'settling time' (5%) 3 seconden bedraagt, terwijl de daarbij optredende 'overshoot' wordt berekend.

De poolbaanvergelijking van het geregelde systeem, voor variatie van K van 0 tot ∞ luidt volgens (13.18):

$$\frac{(z + 0,5)}{8(z - 0,5)(z - 0,25)} = -\frac{1}{K}$$

De poolbaan die reeds eerder in fig. 13.6 werd getekend wordt nogmaals gegeven in fig. 13.13.

De ontwerpeis: $t_s(5\%) = 3$ seconden resulteert in het ontwerpcriterium in het z -vlak dat de polen moeten liggen op de cirkel met middelpunt in O en met straal

$$R_c = e^{\lambda_1 T} \quad (13.53)$$

waarbij voor λ_1 geldt:

$$e^{\lambda_1 t_s(5\%)} = \frac{1}{20}, \text{ ofwel: } \lambda_1 \approx -1 \quad (13.54)$$

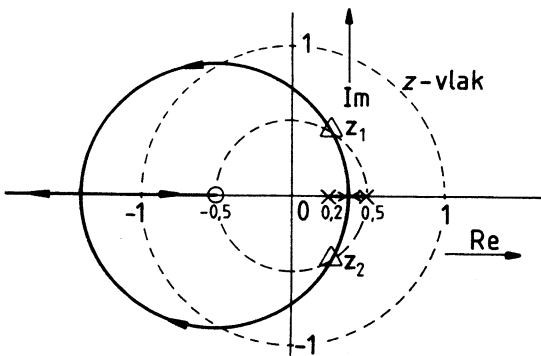


Fig. 13.13 Poolbaan van een proportioneel geregeld bemonsterd tweede-orde-proces

Met $T = \ln 2$ seconden en $\lambda_1 = -1$ wordt:

$$R_c = 0,5 \quad (13.55)$$

De polen mogen dus liggen op de snijpunten z_1 en z_2 van de poolbaan en de cirkel met straal $R = 0,5$ en middelpunt in O , zie fig. 13.13. In dit geval kan de plaats van de polen eenvoudig worden opgemeten uit de figuur vanwege de exact te tekenen poolbaan; het cirkelvormige deel hiervan heeft het middelpunt in $z = -0,5$ en de straal is $\sqrt{0,75} = 0,86$, ga dit na! We vinden:

$$z_{1,2} \approx 0,25 \pm j 0,43 \quad (13.56)$$

Uit de poolbaanvergelijking vinden we hiermee:

$$K = 2 \quad (13.57)$$

Controleer de resultaten van (13.56) en (13.57)!

We berekenen bij deze keuze van K de te verwachten 'overshoot'; er geldt:

$$\begin{aligned} |z_{1,2}| &= e^{\lambda T} = 0,5 \\ \text{en } \arg(z_{1,2}) &= \arctan \frac{\pm 0,43}{0,25} = \pm 1,04 \end{aligned} \quad (13.58)$$

Uit (13.58) volgt:

$$\begin{aligned} \lambda T &= -0,693 \\ \text{en } \frac{\lambda}{\omega} &= \frac{\lambda T}{\omega T} = \frac{-0,693}{1,04} \approx -0,67 \end{aligned}$$

De 'overshoot' wordt daarmee:

$$D = e^{\frac{\lambda}{\omega} \pi} \cdot 100\% \approx 12\% \quad (13.59)$$

Het geregelde systeem heeft bij de berekende instelling ($K = 2$) de overbrengingsfunctie:

$$H(z) = \frac{z + \frac{1}{2}}{4(z^2 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{4})} \quad (13.60)$$

Indien op de ingang een eenheidsstap wordt gezet met $R(z) = \frac{z}{z-1}$ wordt de responsie:

$$C(z) = \frac{z(z + \frac{1}{2})}{4(z-1)(z^2 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{4})} \quad (13.61)$$

Door het uitvoeren van een staartdeling vinden we de volgende bemonsteringswaarden:

$$c(nT) = 0; 0,25; 0,5; 0,56; 0,53; 0,5; \dots$$

De stapresponsie vertoont het in fig. 13.14 gegeven beeld; deze stapresponsie bevestigt de juistheid van de instelling en het voldoen aan de daarbij aangelegde ontwerpcriteria.

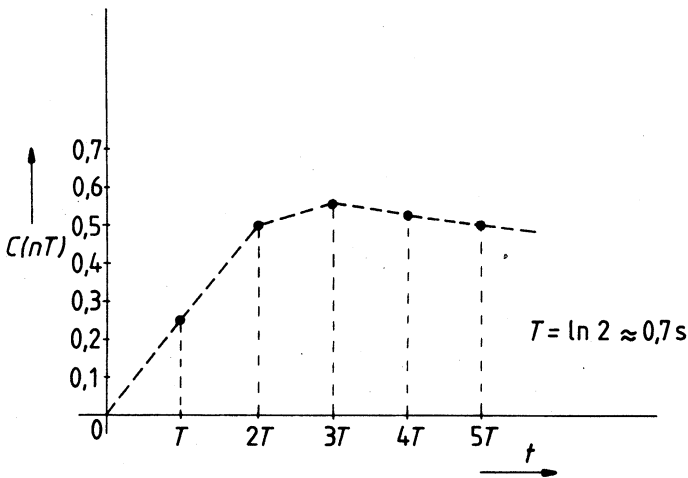


Fig. 13.14 Stapresponsie van het P-geregeld bemonsterd tweede-orde-systeem

Het ontwerpen van integrerende en differentiërende regelacties verloopt in het z -domein in principe op dezelfde wijze als in het s -domein. Ook in het z -domein kan het verloop van poolbaantakken door toevoegen van pool-nulpunt-combinaties zodanig worden beïnvloed dat voldaan wordt aan gunstiger waarden van de ontwerpcriteria.

In veel gevallen zal tot een meer praktische aanpak (zie hoofdstuk 15) worden overgegaan.

13.6 Analyse en ontwerp in het w -vlak

In paragraaf 11.8 werd de bilineaire w -transformatie besproken. Daar werd aangegeven hoe met behulp van de hulpfrequentie Ω het exacte Bode-diagram en de polaire figuur van een systeem met signaalbemonstering kan worden bepaald.

Stel nu dat het in voorbeeld 11.13 geïntroduceerde systeem proportioneel wordt geregeld, zie fig. 13.15.

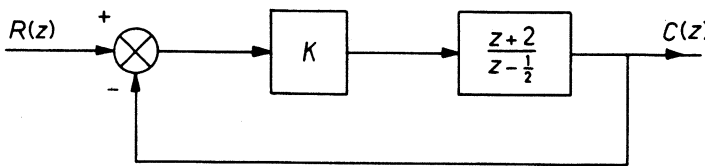


Fig. 13.15 Het proportioneel geregeld proces

De polaire figuur van $H_L(j\Omega)$ voor $K = 1$, alsmede de poolbaan voor $0 \leq K \leq \infty$ zijn gegeven in fig. 13.16.

In de polaire figuur zien we dat voor $\Omega = \infty$ de versterking $-\frac{2}{3}$ bedraagt. Dit betekent dat voor $K = \frac{3}{2}$ het systeem gaat oscilleren. De oscillatie-frequentie $\Omega = \infty$ betekent, zie fig. 11.10, $\omega_{\text{osc}} = \frac{\omega_s}{2}$.

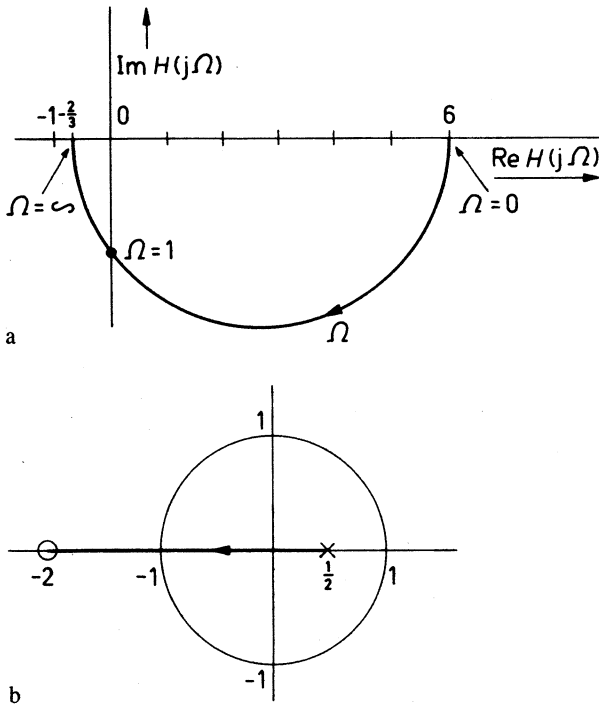


Fig. 13.16 Polaire figuur en poolbaan

Dit resultaat is gemakkelijk te verifiëren door in de poolbaanvergelijking:

$$\frac{z+2}{z-\frac{1}{2}} = \frac{1}{K} \quad (13.62)$$

in te vullen $z = -1$, dit geeft eveneens:

$$K_{\text{osc}} = \frac{3}{2} \quad (13.63)$$

Verder geldt voor de pool in $z = -1$ een argument ter grootte van Π , dus:

$$\omega_{\text{osc}} \cdot T = \Pi, \text{ ofwel: } \omega_{\text{osc}} = \frac{\Pi}{T} = \frac{\omega_s}{2} \quad (13.64)$$

Ook de fase- en versterkingsmarges kunnen b.v. in het Bode-diagram worden gecontroleerd. Voor $K = 1$ is de versterkingsmarge 1,5. De fasemarge vinden we bij de doorsnijding van de 0 dB-as, zie fig. 11.13, voor $\Omega = 2,5$; de fasemarge is ongeveer 55° .

De frequentie waarbij deze fasemarge optreedt, volgt uit (11.53):

$$\omega = \frac{2}{T} \arctan 2,5 = \frac{1,19}{\Pi} \omega_s = 0,38 \omega_s \quad (13.65)$$

13.7 Opgaven

1 Gegeven:

Het blokschema van een bemonsterd systeem volgens fig. 13.17, met:

$$D(z) = \frac{2(z-1)}{2z^2+z} \quad (13.66)$$

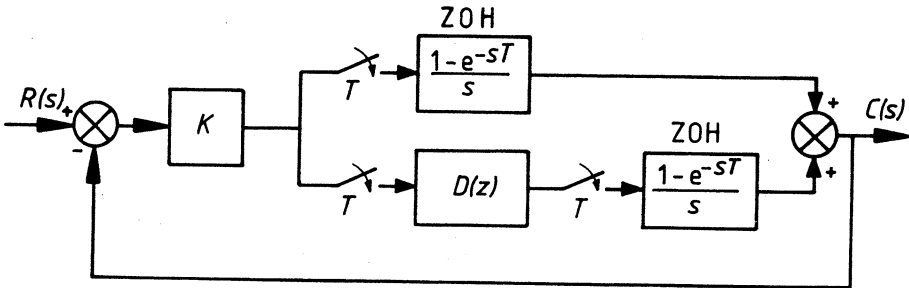


Fig. 13.17 Blokschema van het bemonsterd systeem van opgave 1

Gevraagd:

- Teken het polen- en nulpuntenbeeld van het open systeem.
 - Bepaal de overbrengingsfunctie $H(z) = \frac{C(z)}{R(z)}$.
 - Onderzoek voor welke positieve waarde van K het systeem op de rand van (in)stabiliteit verkeert.
- 2 Gegeven:

Het blokschema van een bemonsterd systeem volgens fig. 13.18; de bemonsteringsperiode T bedraagt: $T = 3 \ln 2$ seconden.

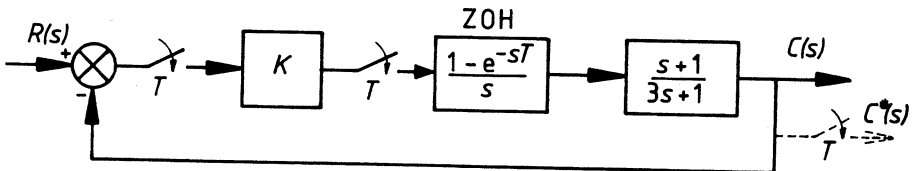


Fig. 13.18 Blokschema van het bemonsterd systeem van opgave 2

Gevraagd:

- Indien het geregelde systeem een pool in $z = \frac{1}{4}$ heeft, bepaal dan K .
 - Voor welke positieve waarden van K is het systeem stabiel? Motiveer uw antwoord.
- 3 Gegeven:
- Het blokschema van een bemonsterd systeem volgens fig. 13.19; de bemonsteringsperiode T bedraagt: $T = 0,5$ s.

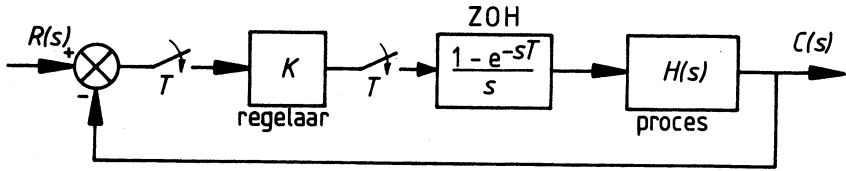


Fig. 13.19 Blokschema van het bemonsterd proces volgens opgave 3

De overbrengingsfunctie van het proces luidt:

$$H(s) = \frac{e^{-sT}}{1 + \tau s}, \text{ met } \tau = 2,24 \text{ s} \quad (13.67)$$

Gevraagd:

- Bepaal de z -getransformeerde overbrengingsfunctie van het open systeem.
 - Bepaal de positieve waarden van K waarvoor het systeem instabiel is.
 - Bereken de waarde van K opdat de 'settling time' (5%) 5 seconden bedraagt.
 - Bepaal bij de onder vraag c gevonden instelling van K de 'overshoot' in de stap-responsie.
 - Stel dat het systeem zo ingesteld moet worden dat juist geen 'overshoot' ontstaat bepaal dan de waarde van K en bereken t_s (5%).
- 4 Gegeven:
Het blokschema van een bemonsterd systeem volgens fig. 13.20; $T = 2 \ln 2$ s.

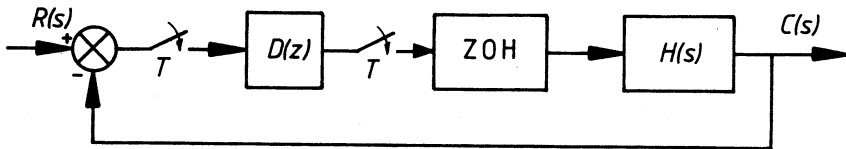


Fig. 13.20 Blokschema van het bemonsterd systeem van opgave 4

Verder geldt: $D(z) = \frac{2(3 - z^{-1})}{3(1 - z^{-1})}$ en $H(s) = \frac{K}{2s + 1}$ (13.68)

Gevraagd:

- Bepaal voor $K = 1,5$ de overbrengingsfunctie $H(z) = \frac{C(z)}{R(z)}$.
 - Teken de poolbaan van dit systeem voor K van $0 \rightarrow \infty$.
 - Voor welke positieve waarden van K is het geregelde systeem instabiel?
- 5 Gegeven wordt het blokschema van een proportioneel geregeld bemonsterd eerste-orde-systeem met looptijd volgens fig. 13.21; $T = 1$ s.

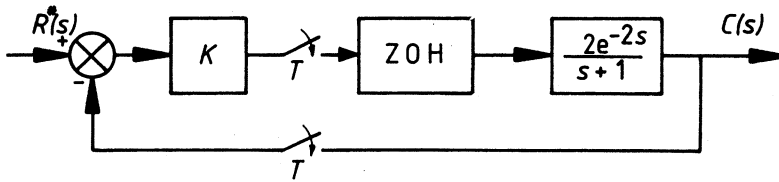


Fig 13.21 Blokschema van het bemonsterd systeem van opgave 5

Gevraagd:

- a Bepaal de overbrengingsfunctie: $H(z) = \frac{C(z)}{R(z)}$.
- b Teken de poolbaan van dit systeem voor variatie van K van nul tot oneindig.
- c Voor welke positieve waarden van K is dit systeem instabiel?