
12 Blokschema's van systemen met signaalbemonstering

12.1 Inleiding

Er zijn systemen die volledig met discontinue signalen werken, maar vaker komen systemen voor waarbij zowel discontinue als continue signalen worden aangetroffen. Deze laatste systemen treden op indien opzettelijk signalen worden bemonsterd in een oorspronkelijk alleen met continue signalen werkend systeem.

In regelsystemen gebaseerd op digitale procesregeling werkt het deel van de regellus dat tussen het meetsignaal (gemeten waarde) en het uitgangssignaal van de (digitale) regelaar zit, met discontinue signalen met discrete signaalwaarden.

Vanuit de blokschema's bezien zijn er drie voor ons van belang zijnde mogelijkheden, en wel:

- 1 Elk element van het blokschema is discreet, d.w.z. is ingericht voor de verwerking van discrete signalen. In dit geval zullen ook alle signalen tussen de elementen discreet zijn.
- 2 Elk element is continu, d.w.z. is ingericht voor de verwerking van continue signalen maar op één of meer plaatsen treden signaalbemonsteringen op.
- 3 Er zijn zowel discrete als continue elementen en er is sprake van zowel discrete als continue signalen.

In het eerste geval kan de beschrijving van de werking van elk blok in het blokschema geschieden door middel van een functie van z , ofwel door een overbrengingsfunctie $H(z)$. We passen dan de z -transformatie toe op reeksen getallen.

In de twee overige gevallen treedt een moeilijkheid op. Immers bij de continue elementen dienen de in- en uitgangssignalen op elk tijdstip bekend te zijn, terwijl deze signalen bij de discrete elementen slechts op de bemonsteringstijdstippen bekend zijn. Om toch in deze twee gevallen met succes systeemanalyse te kunnen plegen kijken we ook bij de continue signalen alleen naar de waarden van deze signalen op de bemonsteringstijdstippen. Hiertoe brengen we dan op die plaatsen waar we geïnteresseerd zijn in het verloop van een overigens continu signaal een *fictieve bemonsteringsschakelaar* aan en betrekken dan de bemonsterde waarden in onze beoordeling. Zoals reeds eerder is opgemerkt gaan we er van uit dat *alle* bemonsteringsschakelaars steeds *synchroon* lopen.

Zoals nog zal blijken kan in bepaalde gevallen waarbij discontinue signalen en continue elementen samen optreden *niet* het continue uitgangssignaal $y(t)$ worden bepaald, maar *wel* de waarden van $y(t)$ op de bemonsteringstijdstippen, dus $y(nT)$. Om in zulke gevallen toch iets te weten te komen over het verloop van $y(t)$ *tussen* de bemonsteringstijdstippen kan de z.g. *gemodificeerde z -transformatie* worden toegepast. In het kader van dit boek wordt hierop niet nader ingegaan.

12.2 Overbrengingsfuncties van discrete elementen en systemen

Omdat bij een discreet element het in- en uitgangssignaal slechts op de bemonsterings-tijdstippen bekend is, kan de z -transformatie direct worden toegepast op in- en uitgangs-signaal voor de bepaling van $H(z)$; zie fig. 12.1.

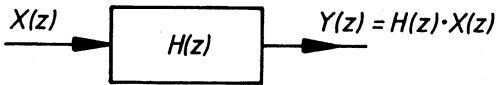


Fig. 12.1 Blokschema van een discreet element in het z -domein

De betrekking tussen in- en uitgang is een *algebraïsche* vergelijking (z.g. *differentie-vergelijking*) en er geldt de relatie:

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z) \quad (12.1)$$

of natuurlijk ook:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (12.2)$$

Voorbeeld 12.1

Stel de ingang $x(nT)$ van een discreet element wordt gegeven door: $[x(nT)] = 2, 1, 0, 0, 0, \dots$ en de uitgang $y(nT)$ door: $[y(nT)] = 16, 16, 8, 4, 1, 0, 0, 0, \dots$

Gevraagd:

De overbrengingsfunctie $H(z)$ van dit element.

Oplissing:

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z} \{ [x(nT)] \} = 2 + z^{-1} \\ Y(z) &= \mathcal{Z} \{ [y(nT)] \} = 16 + 16z^{-1} + 8z^{-2} + 4z^{-3} + z^{-4} \end{aligned}$$

Met behulp van formule (12.2) volgt dan:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{16 + 16z^{-1} + 8z^{-2} + 4z^{-3} + z^{-4}}{2 + z^{-1}} = \\ &= \frac{16z^4 + 16z^3 + 8z^2 + 4z + 1}{2z^4 + z^3} = \\ &= 8 + 4z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3} \end{aligned}$$

Voorbeeld 12.2

Gegeven het blokschema van fig. 12.2.

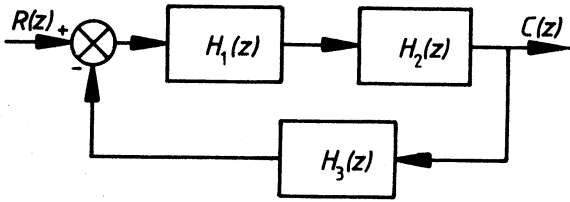


Fig. 12.2 Blokschema van een teruggekoppeld systeem met discrete elementen in het z-domein

Gevraagd:

De overbrengingsfunctie $H(z) = \frac{C(z)}{R(z)}$.

Oplossing:

Daar elk element in dit blokschema discreet is en dus de relatie volgens formule (12.2) geldt, wordt:

$$H(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{H_1(z) H_2(z)}{1 + H_1(z) H_2(z) H_3(z)}$$

12.3 Overbrengingsfuncties van systemen met signaalbemonstering

Bij een (continu) element, dat deel uitmaakt van een bemonsterd systeem, kan op drie manieren signaalbemonstering plaatsvinden:

- Bemonstering aan de uitgang van het element.
- Bemonstering aan de ingang van het element.
- Bemonstering aan in- én uitgang van het element.

Ad a. In figuur 12.3 is signaalbemonstering aan de uitgang van een continu element weergegeven.

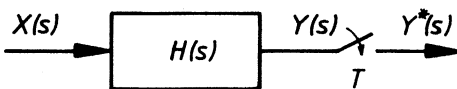


Fig. 12.3 Signaalbemonstering aan de uitgang van een continu element

In het schema van fig. 12.3 geldt:

$$Y(s) = H(s) \cdot X(s)$$

Voor de bemonsterde uitgang $Y^*(s)$ geldt dan:

$$\begin{aligned}
 Y^*(s) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y(s + jn\omega_s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(s + jn\omega_s) X(s + jn\omega_s) \\
 &= [H(s) \cdot X(s)]^*
 \end{aligned}
 \tag{12.3}$$

En na z-transformatie:

$$Y(z) = \mathcal{Z} \{ [H(s) \cdot X(s)]^* \} = HX(z) \tag{12.4}$$

De vorm $HX(z)$ in uitdrukking (12.4) geeft aan dat van het produkt $H(s) \cdot X(s)$ de z-getransformeerde moet worden bepaald. Merk op dat dit dus ongelijk is aan $H(z) \cdot X(z)$. Uit formule (12.4) blijkt dat de overbrengingsfunctie van het element met overbrengingsfunctie $H(z)$ gevolgd door de signaalbemonstering, *niet* kan worden bepaald.

Ad b. In figuur 12.4 is signaalbemonstering aan de ingang van een continu element weer gegeven; nu geldt:

$$Y(s) = H(s) \cdot X^*(s) \tag{12.5}$$

Voor deze gemengde uitdrukking is het niet mogelijk om een terugtransformatie naar het tijd-domein uit te voeren, met andere woorden we kunnen niet zonder meer $y(t)$ bepalen.

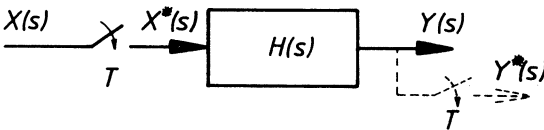


Fig. 12.4 Signaalbemonstering aan de ingang van een continu element

Met behulp van de reeds in de inleiding aangekondigde fictieve bemonsteringsschakelaar is het wel mogelijk om $Y^*(s)$ te bepalen. Hiermee kunnen dan ook van het signaal $y(t)$ de bemonsteringswaarden op de bemonsteringstijdstippen worden berekend.

Er geldt:

$$\begin{aligned}
 Y^*(s) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y(s + jn\omega_s) \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(s + jn\omega_s) \cdot X^*(s + jn\omega_s)
 \end{aligned}
 \tag{12.6}$$

Daar per definitie geldt:

$$X^*(s + jn\omega_s) = X^*(s) \tag{12.7}$$

dit betekent immers een bemonstering van een bemonstering, wordt (12.6) nu:

$$Y^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(s + jn\omega_s) \cdot X^*(s) = H^*(s) \cdot X^*(s) \tag{12.8}$$

Overgang naar het z-domein levert dan:

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z) \quad (12.9)$$

en ook:
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

Ad c. In fig. 12.5 is signaalbemonstering aan de in- en aan de uitgang van een continu element weergegeven; nu geldt:

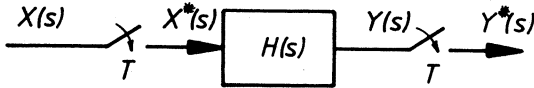


Fig. 12.5 Signaalbemonstering aan de ingang en aan de uitgang van een continu element

$$Y(s) = H(s) \cdot X^*(s)$$

Gezien de voorgaande afleiding voor $Y^*(s)$, met fictieve schakelaar, geldt nu eveneens:

$$Y^*(s) = [H(s) \cdot X^*(s)]^* = H^*(s) \cdot X^*(s) \quad (12.10)$$

en na z-transformatie weer:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (12.11)$$

In dit geval is $y(t)$ ook weer niet te bepalen maar wel $y(nT)$.

Tot nu toe hebben we gekeken naar systemen die uit één blok bestonden. Meestal zal een blokschema meerdere blokken bevatten en kunnen op verschillende plaatsen in een dergelijk blokschema signaalbemonsteringen plaatsvinden. In principe treden in blokschema's drie verschillende situaties op, nl. cascadeschakeling van blokken, parallelschakeling van blokken en terugkoppeling.

Cascadeschakeling van blokken

Bij cascadeschakeling van twee (continue) blokken is het van belang of er tussen deze blokken (elementen) *wel* of *niet* een signaalbemonstering optreedt. In fig. 12.6 zijn deze twee verschillende situaties aangegeven. Voor de bepaling van $Y(z)$ en eventueel $y(nT)$ wordt hier weer gebruik gemaakt van fictieve bemonsteringsschakelaars op het uitgangssignaal.

In het geval van fig. 12.6a geldt:

$$A(s) = H_1(s) X^*(s)$$

en:
$$A^*(s) = H_1^*(s) X^*(s)$$

$$Y(s) = H_2(s) A^*(s) = H_2(s) H_1^*(s) X^*(s)$$

en:
$$Y^*(s) = H_2^*(s) H_1^*(s) X^*(s)$$

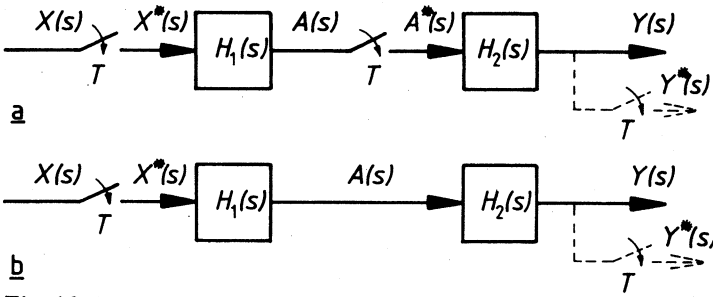


Fig. 12.6 Cascadeschakeling van blokken

Na z-transformatie:

$$Y(z) = H_1(z) H_2(z) X(z)$$

Of:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H_1(z) \cdot H_2(z) \quad (12.12)$$

Indien bij een cascadeschakeling van twee blokken er een signaalbemonstering tussen de blokken plaatsvindt is de totale overbrengingsfunctie $H(z)$ gelijk aan het produkt van de afzonderlijke overbrengingsfuncties $H_1(z)$ en $H_2(z)$ van de blokken met overbrengingsfuncties $H_1(s)$ en $H_2(s)$.

In het geval van fig. 12.6b geldt:

$$\left. \begin{aligned} A(s) &= H_1(s) X^*(s) \\ Y(s) &= H_2(s) A(s) \end{aligned} \right\} \Rightarrow Y(s) = H_1(s) H_2(s) X^*(s)$$

Zodat:

$$Y^*(s) = [H_1(s) H_2(s)]^* \cdot X^*(s)$$

En na z-transformatie:

$$Y(z) = H_1 H_2(z) X(z)$$

Of:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H_1 H_2(z) \quad (12.13)$$

Indien bij een cascadeschakeling van blokken er geen signaalbemonstering tussen de blokken plaatsvindt is de totale overbrengingsfunctie $H(z)$ gelijk aan de z-getransformeerde van de totale overbrengingsfunctie $H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s)$ van de twee blokken met overbrengingsfunctie $H_1(s)$ en $H_2(s)$.

Voorbeeld 12.3

Gegeven is het blokschema volgens fig. 12.7.

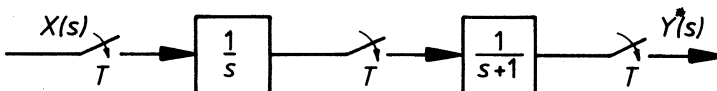


Fig. 12.7 Blokschema behorende bij voorbeeld 12.3

Er geldt:

$$H(z) = \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s} \right\} \cdot \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s+1} \right\} = \frac{z}{z-1} \cdot \frac{z}{z-e^{-T}}$$

$$= \frac{z^2}{(z-1)(z-e^{-T})} \quad (12.14)$$

Voorbeeld 12.4

Gegeven is het blokschema volgens fig. 12.8.

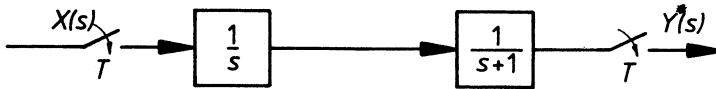


Fig. 12.8 Blokschema behorende bij voorbeeld 12.4

Er geldt:

$$H(z) = \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s(s+1)} \right\} = \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \right\}$$

$$= \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}} = \frac{z(1-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})} \quad (12.15)$$

Parallelschakeling van blokken

In fig. 12.9 is de parallelschakeling van twee bemonsterde (continue) elementen weergegeven. In dit blokschema geldt:

$$Y(s) = H_1(s) X^*(s) + H_2(s) X^*(s) = [H_1(s) + H_2(s)] \cdot X^*(s)$$

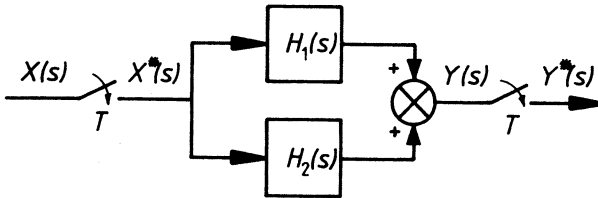


Fig. 12.9 Parallelschakeling van twee bemonsterde blokken

Voor de bemonsterde uitgang, $Y^*(s)$, geldt:

$$Y^*(s) = [H_1(s) + H_2(s)]^* X^*(s)$$

En na z -transformatie:

$$Y(z) = \mathcal{Z} [H_1(s) + H_2(s)]^* \cdot X(z) = [H_1(z) + H_2(z)] \cdot X(z)$$

Of:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H_1(z) + H_2(z) \quad (12.16)$$

Bij parallelschakeling van blokken op de in fig. 12.9 aangegeven wijze is de z -getransformeerde overbrengingsfunctie dus de som van de afzonderlijke z -getransformeerde overbrengingsfuncties $H_1(z)$ en $H_2(z)$.

Voorbeeld 12.5

Gegeven een blokschema volgens fig. 12.9, met $H_1(s) = \frac{1}{s}$ en $H_2(s) = \frac{1}{s+1}$. Voor de overbrengingsfunctie $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ geldt nu, zoals de lezer zelf kan controleren:

$$H(z) = \frac{z(2z - e^{-T} - 1)}{(z - 1)(z - e^{-T})} \quad (12.17)$$

Terugkoppeling

Bij een terugkoppeling in een bemonsterd systeem is het belangrijk of de signaalbemonstering in de *terugkoppelweg* dan wel in de *voorwaartse weg* plaatsvindt. Het eerste geval is in fig. 12.10 weergegeven.

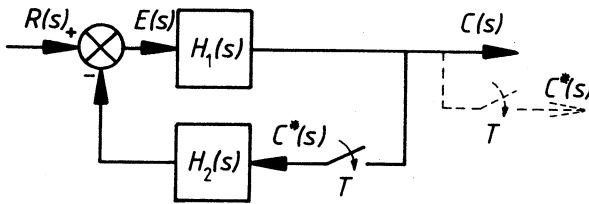


Fig. 12.10 Systeem met signaalbemonstering in de terugkoppelweg

Er geldt: $E(s) = R(s) - H_2(s) C^*(s)$ (12.18)

en $C(s) = H_1(s) E(s)$ (12.19)

Uit (12.18) en (12.19) volgt:

$$\begin{aligned} C(s) &= H_1(s) [R(s) - H_2(s) C^*(s)] \\ &= H_1(s) R(s) - H_1(s) H_2(s) C^*(s) \end{aligned}$$

Voor de bemonsterde uitgang geldt:

$$C^*(s) = [H_1(s) R(s)]^* - [H_1(s) H_2(s)]^* C^*(s)$$

En na z-transformatie:

$$C(z) = H_1 R(z) - H_1 H_2(z) C(z)$$

of: $C(z) [1 + H_1 H_2(z)] = H_1 R(z)$

en: $C(z) = \frac{H_1 R(z)}{1 + H_1 H_2(z)}$ (12.20)

In dit geval kan dus de overbrengingsfunctie $H(z) = \frac{C(z)}{R(z)}$ niet worden bepaald, omdat

$R(z)$ niet gescheiden voorkomt in de teller van de uitdrukking voor $C(z)$.

In fig. 12.11 is het geval weergegeven dat in de 'voorwaartse weg' een signaalbemonstering plaatsvindt.

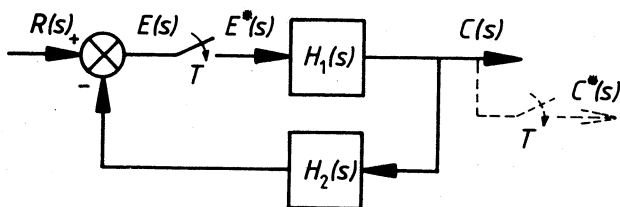


Fig. 12.11 Systeem met signaalbemonstering in de voorwaartse weg

In het blokschema van fig. 12.11 geldt:

$$C(s) = H_1(s) E^*(s) \quad (12.21)$$

en
$$E(s) = R(s) - H_2(s) C(s) \quad (12.22)$$

Uit (12.21) en (12.22) volgt:

$$E(s) = R(s) - H_2(s) H_1(s) E^*(s)$$

dus
$$E^*(s) = R^*(s) - [H_1(s) H_2(s)]^* E^*(s)$$

en ook:
$$E^*(s) = \frac{R^*(s)}{1 + [H_1(s) H_2(s)]^*}$$

Voor de bemonsterde uitgang, $C^*(s)$, geldt:

$$C^*(s) = [H_1(s) E^*(s)]^* = H_1^*(s) E^*(s) \quad (12.23)$$

Uit (12.23) volgt:

$$C^*(s) = \frac{H_1^*(s)}{1 + [H_1(s) H_2(s)]^*} \cdot R^*(s)$$

En na z-transformatie:

$$C(z) = \frac{H_1(z)}{1 + H_1 H_2(z)} \cdot R(z)$$

Dus
$$H(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{H_1(z)}{1 + H_1 H_2(z)} \quad (12.24)$$

In het geval van een eenheidsterugkoppeling is $H_2(s) = 1$ en wordt:

$$H(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{H_1(z)}{1 + H_1(z)} \quad (12.25)$$

Indien in een blokschema signalen en/of blokken gescheiden zijn door bemonsteringsschakelaars, dan komen in de overbrengingsfunctie ook de z-getransformeerden afzonderlijk voor; bij het niet gescheiden zijn komen de z-getransformeerden van de combinatie van niet gescheiden signalen en blokken voor.

Voorbeeld 12.6

Stel in het blokschema volgens fig. 12.11 geldt: $H_1(s) = \frac{1}{s}$ en $H_2(s) = \frac{1}{s+1}$.

Voor $H(z)$ vinden we dan: (ga dit na!)

$$H(z) = \frac{\mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s} \right\}}{1 + \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s(s+1)} \right\}} = \frac{z(z - e^{-T})}{z^2 - 2z e^{-T} + e^{-T}} \quad (12.26)$$

12.4 Toepassingen

De in § 12.3 getrokken conclusies zullen nu worden toegepast op enkele voorbeelden.

Voorbeeld 12.7

Een in de regeltechniek veel voorkomend geval is aangegeven in fig. 12.12. Een bemonsterd signaal wordt hier toegevoerd aan een nulde-orde-houdschakeling gevolgd door een proces. Een dergelijke situatie treedt op bij de sturing van een proces door middel van b.v. een microprocessor. Op bepaalde tijdstippen geeft deze nieuwe stuurwaarden af aan de nulde-orde-houdschakeling; deze laatste schakeling geeft dan een continu stuursignaal af aan het proces.

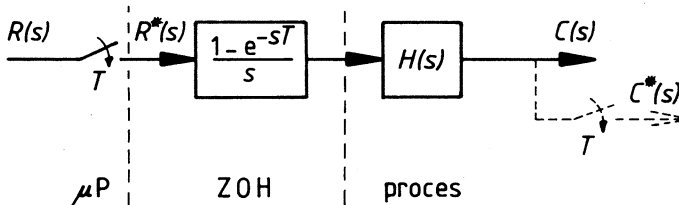


Fig. 12.12 Sturing van een proces met behulp van een discontinu stuursignaal via een nulde-orde-houdschakeling

We kunnen hier alleen de waarden berekenen van het procesuitgangssignaal op de bemonsteringstijdstippen. Er geldt:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \mathcal{Z} \left[G_{ho}(s) H(s) \right] = \mathcal{Z} \left[\frac{1 - e^{-sT}}{s} H(s) \right] \quad (12.27)$$

Met de rekenregels van de z-transformatie leidt dit tot:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \mathcal{Z} \left[\frac{H(s)}{s} - \frac{e^{-sT} H(s)}{s} \right] = \mathcal{Z} \left[\frac{H(s)}{s} \right] - \mathcal{Z} \left[\frac{e^{-sT} H(s)}{s} \right]$$

Of:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \mathcal{Z} \left[\frac{H(s)}{s} \right] - z^{-1} \mathcal{Z} \left[\frac{H(s)}{s} \right] = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{H(s)}{s} \right]$$

Dus:
$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[\frac{H(s)}{s} \right] \quad (12.28)$$

Indien b.v. het proces een integrator zou zijn dan geldt: $H(s) = \frac{1}{s}$, en wordt:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{z-1}{z} \cdot \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s^2} \right\} = \frac{T}{z-1} \quad (12.29)$$

Indien bovendien hetingangssignaal een eenheidsstap is, ofwel: $r(t) = 1(t)$, dan is $R(s) = \frac{1}{s}$ en wordt: $R(z) = \frac{z}{z-1}$.

Hiermee wordt dan:

$$C(z) = \frac{T}{z-1} \cdot R(z) = \frac{T}{z-1} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{zT}{(z-1)^2} \quad (12.30)$$

Er geldt dan voor het uitgangssignaal van het proces:

$$c(nT) = nT \quad (12.31)$$

hetgeen een gemakkelijk controleerbaar en in dit geval voorspelbaar resultaat aangeeft, zoals de lezer zelf kan constateren.

Voorbeeld 12.8

Gegeven:

Het schema volgens fig. 12.12 nu met een eerste-orde-proces met overbrengingsfunctie

$$H(s) = \frac{1}{s+1}.$$

Gevraagd:

De eenheidsstapresponsie te bepalen indien tevens geldt: $T = \ln 2$ seconden.

Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{C(z)}{R(z)} &= \mathcal{Z} \left[G_{\text{ho}}(s) H(s) \right] = \mathcal{Z} \left[\frac{1 - e^{-sT}}{s} \cdot \frac{1}{s+1} \right] = \\ &= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[\frac{1}{s(s+1)} \right] = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \right] = \\ &= \frac{z-1}{z} \left[\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-T}} \right] \end{aligned} \quad (12.32)$$

Indien $R(s) = \frac{1}{s}$, geldt: $R(z) = \frac{z}{z-1}$ dus:

$$C(z) = \frac{z}{z-1} \cdot \frac{z-1}{z} \left[\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}} \right] =$$

$$= \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}} \quad (12.33)$$

Met $T = \ln 2$ seconden wordt:

$$C(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-\frac{1}{2}} \quad (12.34)$$

Terugtransformatie met behulp van de tabel levert:

$$c(nT) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (12.35)$$

En dus: $[c(nT)] = 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \dots$ (12.36)

In dit geval is terugtransformatie door middel van deling lastiger:

$$C(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-\frac{1}{2}} = \frac{z}{2z^2 - 3z + 1} \quad (12.37)$$

Na deling ontstaat:

$$C(z) = \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{3}{4}z^{-2} + \frac{7}{8}z^{-3} + \dots \quad (12.38)$$

hetgeen dezelfde reeks $[c(nT)]$ oplevert.

In fig. 12.13 is de stapresponsie geschetst.

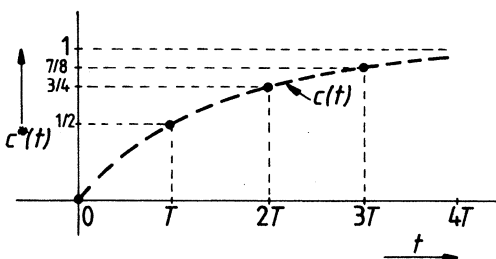


Fig. 12.13 Stapresponsie van het systeem volgens voorbeeld 12.8

Met het eindwaardetheorema wordt de eindwaarde van $c(nT)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c(nT) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} C(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)}{z} \left[\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-\frac{1}{2}} \right]$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1} \left[1 - \frac{z-1}{z-\frac{1}{2}} \right] = 1 \quad (12.39)$$

Dit resultaat volgt natuurlijk ook uit de berekende uitdrukking voor $c(nT)$ en een kwalitatieve beschouwing over het behandelde systeem. Hoewel we over het verloop van $c(t)$ tussen de bemonsteringstijdstippen niets kunnen zeggen, is het in dit eenvoudige geval gemakkelijk in te zien dat $c(t)$ volgens de in fig. 12.13 getekende streeplijn verloopt.

Voorbeeld 12.9

Gegeven:

Het blokschema van een bemonsterd regelsysteem; zie fig. 12.14.

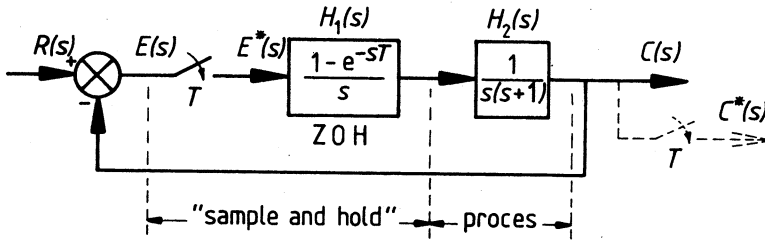


Fig. 12.14 Bemonsterd servo-systeem

Het proces bestaat uit een cascadeschakeling van een eerste-orde-systeem ($K = 1$; $\tau = 1$ seconde) en een zuivere integrator. Een terugkoppeling moet ervoor zorgen dat de uitgang de ingang zo goed mogelijk volgt (servo-systeem). Het verschilsignaal $e = r - c$ is echter slechts op discrete tijdstippen ($0, T, 2T, 3T, \dots$) bekend, waarbij de bemonsteringsperiode $T = 1$ seconde bedraagt.

Een nulde-orde-houdschakeling moet het bemonsterde signaal reconstrueren, teneinde een geschikte sturing van het proces mogelijk te maken.

Gevraagd:

De responsie $c^*(t)$ te bepalen, indien de ingang $r(t)$ stapvormig verandert (eenheidsstap).

Oplossing:

Voor dit systeem geldt (zie § 12.3):

$$C(z) = \frac{H_1 H_2(z)}{1 + H_1 H_2(z)} \cdot R(z) \quad (12.40)$$

Om $C(z)$ te bepalen is het dus nodig eerst $H_1 H_2(z)$ te bepalen.

$$\begin{aligned} H_1 H_2(z) &= \mathcal{Z} \left[\frac{1 - e^{-sT}}{s} \cdot \frac{1}{s(s+1)} \right] \\ &= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{1}{s^2(s+1)} \right] \\ &= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} \right] \\ &= \left(\frac{z-1}{z} \right) \left[\frac{zT}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-e^{-T}} \right] \end{aligned}$$

Met $T = 1$ seconde levert dit:

$$\begin{aligned}
 H_1 H_2(z) &= \frac{z-1}{z} \left[\frac{z}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-e^{-1}} \right] \\
 &= \frac{e^{-1}z + 1 - 2e^{-1}}{(z-1)(z-e^{-1})} \\
 &= \frac{0,37z + 0,26}{(z-1)(z-0,37)} \tag{12.41}
 \end{aligned}$$

Voor $R(z)$ geldt ($R(s) = 1/s$):

$$R(z) = \frac{z}{z-1} \tag{12.42}$$

Substitutie van (12.41) en (12.42) in (12.40) geeft:

$$\begin{aligned}
 C(z) &= \frac{0,37z + 0,26}{(z-1)(z-0,37) + 0,37z + 0,26} \cdot \frac{z}{z-1} \\
 &= \frac{0,37z^2 + 0,26z}{z^3 - 2z^2 + 1,63z - 0,63}
 \end{aligned}$$

Na deling:

$$C(z) = 0,37z^{-1} + z^{-2} + 1,4z^{-3} + 1,4z^{-4} + 1,15z^{-5} + 0,9z^{-6} + 0,8z^{-7} + \dots \tag{12.43}$$

Volgens het eindwaardetheorema geldt voor $c(\infty)$:

$$c(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} C(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{0,37z + 0,26}{(z-1)(z-0,37) + 0,37z + 0,26} = 1 \tag{12.44}$$

Dit klopt, want het proces bevat een zuivere integrator, zodat het teruggekoppelde systeem een statische versterking gelijk aan 1 heeft.

Voor $[c(nT)]$ geldt dus:

$$[c(nT)] = 0; 0,37; 1; 1,4; 1,4; 1,15; 0,9; 0,8; \dots \tag{12.45}$$

In fig. 12.15 is een tweetal stapresponsies, met behulp van een computersimulatie verkregen, afgebeeld van het besproken servo-systeem. De 'overshoot' in de stapresponsie is met 'sample and hold' ca. 45% en zonder 'sample and hold' ca. 16%. Duidelijk blijkt dat het systeem met bemonsterings- en houdschakeling minder gedempt is.

Fig. 12.16 geeft het verloop van het stuursignaal na de 'sample and hold' bij dezelfde stapresponsie aan. Duidelijk blijkt het stapvormige verloop van dit door de nulde-orde-houdschakeling gereconstrueerde signaal.

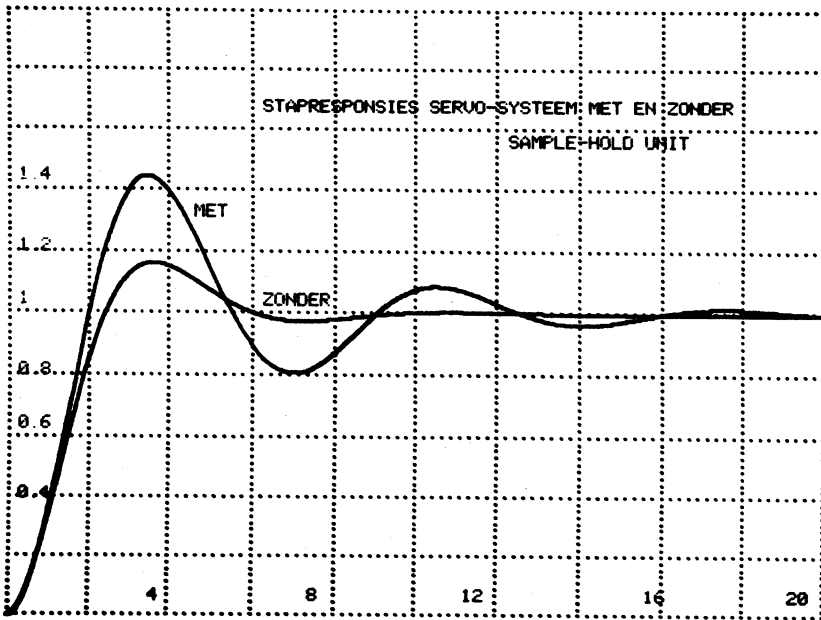


Fig. 12.15 Stapresponsies van een computersimulatie van het servo-systeem met en zonder sample/hold unit

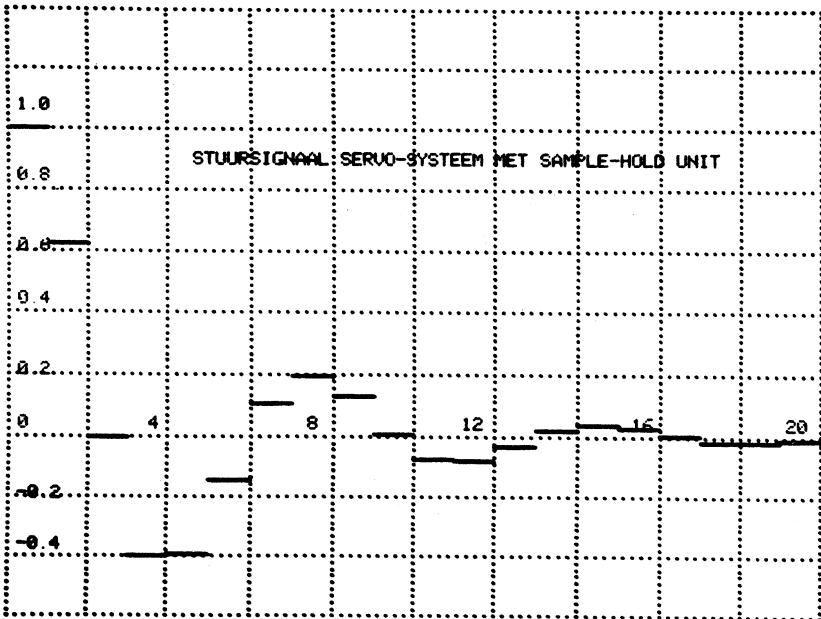


Fig. 12.16 Het gereconstrueerde stuursignaal van het servo-systeem

12.5 Opgaven

- 1 Stel dat hetingangssignaal van een discreet element is: $x(nT) = 1, 0, 1, 0, 0, \dots$ en het daarbij optredende uitgangssignaal is: $y(nT) = 0, 0, 2, 0, 2, 0, 0, \dots$. Bepaal dan van dit element de overbrengingsfunctie $H(z)$.
- 2 Gegeven:
Het blokschema volgens fig. 12.17; aan de ingang wordt een eenheidsstap aangeboden, de bemonsteringsperiode bedraagt $T = 1$ seconde.

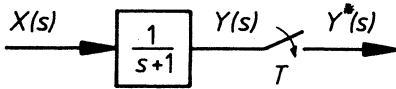


Fig. 12.17 Blokschema behorende bij opgave 2

Bepaal het uitgangssignaal op de bemonsteringstijdstippen: $y(nT)$. Bepaal ook $y(\infty)$. Was dit resultaat te voorspellen?

- 3 Gegeven:
Het blokschema volgens fig. 12.18; de bemonsteringsperiode bedraagt $T = 1$ seconde.

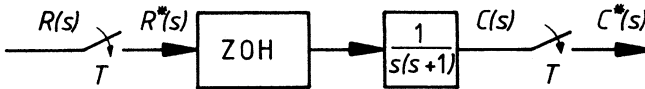


Fig. 12.18 Blokschema behorende bij opgave 3

Bepaal $H(z) = \frac{C(z)}{R(z)}$.

- 4 Gegeven:
Het blokschema volgens fig. 12.19; $T = \ln 2$ seconden.

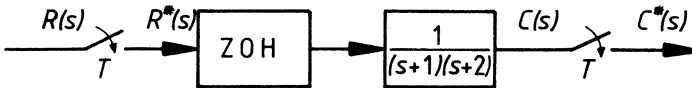


Fig. 12.19 Blokschema behorende bij opgave 4

Bepaal de eenheidsstapresponsie $[c(nT)]$. Bepaal ook $c(\infty)$.

- 5 Gegeven:
Het blokschema van een bemonsterd systeem volgens fig. 12.20; de bemonsteringsperiode bedraagt $T = 1$ seconde.
Gevraagd:
 - a Bepaal $C(z)$, indien op de ingang een eenheidsstap wordt gezet.
 - b Bepaal $c(nT)$ voor $n = 0, 1, 2, 3$.

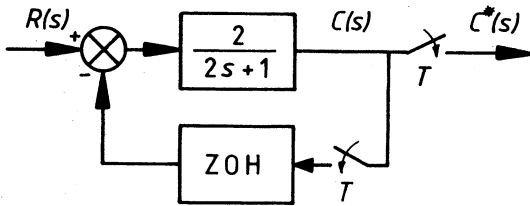


Fig. 12.20 Blokschema behorende bij opgave 5

6 Gegeven:

Het blokschema volgens fig. 12.21; de bemonsteringsperiode bedraagt $T = 0,5$ seconde.

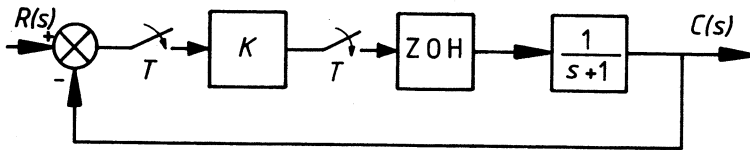


Fig. 12.21 Blokschema behorende bij opgave 6

Gevraagd:

- Bepaal de overbrengingsfunctie $H(z) = \frac{C(z)}{R(z)}$.
- Bepaal $c(nT)$, indien aan de ingang een eenheidsstap wordt gezet, voor $K = 1$; 1,5 en 2,5.
- Bepaal voor die waarden van K ook $c(\infty)$ en schets de responsies.