

# 11 Mathematische beschrijving van bemonsterde signalen

## 11.1 Inleiding

In dit hoofdstuk zullen eerst enige methoden worden aangegeven voor de beschrijving van discontinue (bemonsterde) signalen waaruit het specifieke karakter van dergelijke signalen blijkt. De nadelen van deze beschrijvingswijzen zijn voor regeltechnische toepassing echter zo groot dat meestal gebruik zal worden gemaakt van een beschrijving die wordt verkregen door een geschikte transformatie; de z.g. *z-transformatie*. Ten gevolge van deze transformatie wordt een systeembeschouwing in het *z*-domein mogelijk die nauw aansluit bij de beschouwingen die in de eerste hoofdstukken van dit boek werden uitgevoerd voor continusignalen en -systemen in het *s*-domein. De daar toegepaste eigenschappen en regels gelden eveneens in het *z*-domein hetgeen een extra stimulans betekent voor de toepassing van de *z*-transformatie.

## 11.2 Beschrijving van een bemonsterd signaal met behulp van een impulsreeks

We hebben tot nu toe het bemonsteringsproces beschouwd als een schakelaar die elke  $T$  seconden gedurende een tijdsduur  $\tau$  sluit. Om de mathematische beschrijving aanzienlijk te vereenvoudigen, kan men veelal uitgaan van een z.g. *ideale bemonstering*, d.w.z. dat de 'schakelaar' die voor de bemonstering zorgt oneindig kort sluit. Om de pulsen van het bemonsterde signaal toch energie-inhoud te geven, moet de hoogte van de pulsen oneindig gesteld worden, zodanig dat de oppervlakte gelijk aan één is. Bij de bepaling van de overbrengingsfunctie  $G_{ho}(s)$  van de nulde-orde-houdschakeling werd hier reeds gebruik van gemaakt, zie formule (10.11). In praktische schakelingen is dit uiteraard niet het geval; de schakelaar sluit gedurende een korte tijd  $\tau$ , waarin de AD-omzetter gelegenheid wordt gegeven de signaalgrootte te 'herkennen'. In figuur 11.1 is dit aangegeven. De bemonsteringsperiode bedraagt  $T$ .

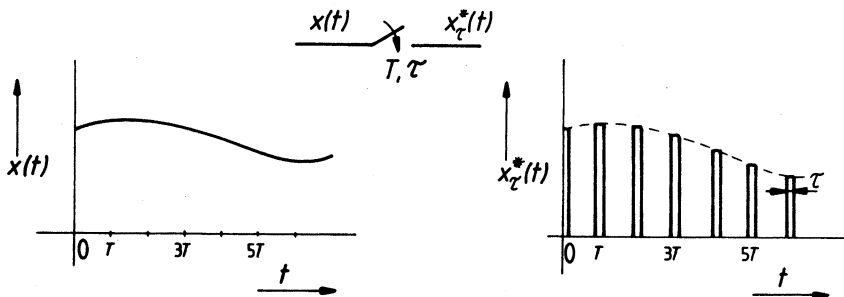


Fig. 11.1 Schakelaar met eindige 'sluittijd'

Het bemonsterde signaal wordt voorgesteld door  $x_{\tau}^*(t)$ . De eerste aanname is dat de schakelaar wel zo kort sluit dat het bemonsterde signaal gedurende de sluittijd *constant* is (z.g. 'flat-top approximation'). Er geldt dan:

$$\text{en} \quad \begin{array}{ll} x_{\tau}^*(t) = x(kT) & \text{voor } kT \leq t \leq kT + \tau \\ x_{\tau}^*(t) = 0 & \text{voor } kT + \tau < t < (k+1)T, \text{ met:} \end{array} \quad (11.1)$$

$$k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{Dus:} \quad x_{\tau}^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) [1(t - kT) - 1(t - kT - \tau)] \quad (11.2)$$

$$\text{waarbij} \quad \begin{array}{ll} 1(t - a) = 1 & \text{voor } t \geq a \\ = 0 & \text{voor } t < a \end{array} \quad (\text{'Heaviside' functie})$$

Toepassing van de laplace-transformatie op uitdrukking (11.2) levert:

$$\begin{aligned} X_{\tau}^*(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \left[ \frac{e^{-ksT}}{s} - \frac{e^{-ksT} \cdot e^{-s\tau}}{s} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) [1 - e^{-s\tau}] \cdot \frac{e^{-skT}}{s} \end{aligned}$$

Omdat  $\tau$  klein is, mag worden gesteld:

$$1 - e^{-s\tau} = 1 - \left( 1 - s\tau + \frac{s^2 \tau^2}{2!} - \frac{s^3 \tau^3}{3!} + \dots \right) \approx s\tau \quad (11.3)$$

Uit (11.2) en (11.3) volgt:

$$X_{\tau}^*(s) \approx \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) s\tau \frac{e^{-skT}}{s} = \tau \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-ksT} \quad (11.4)$$

Na terugtransformatie naar het tijddomein ontstaat:

$$x_{\tau}^*(t) = \tau \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \cdot \delta(t - kT) = \tau x^*(t) \quad (11.5)$$

In (11.5) stelt  $x^*(t)$  de reeks bemonsteringswaarden voor, geschreven als een reeks impulsen met energie-inhouden gelijk aan de bemonsteringswaarden.

In figuur 11.2 is dit schematisch aangegeven.

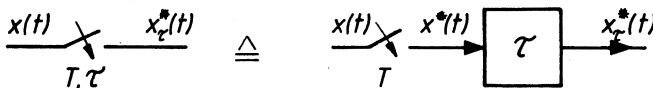


Fig. 11.2 Equivalentie tussen een praktische en een 'ideale' bemonsteringsschakelaar

Uit deze figuur blijkt onder meer dat een niet-ideale bemonsteringsschakelaar vervangen kan worden door een ideale, gevolgd door een factor  $\tau$ . Deze benadering is dus slechts geoorloofd indien  $\tau$  klein is ten opzichte van de sample-tijd.

Omdat in vrijwel elk bemonsterd systeem een houdschakeling is opgenomen, zal het puls-vormige bemonsterde signaal als het ware weer 'uitgesmeerd' worden over een gehele bemonsteringsperiode. Op die manier wordt de factor  $\tau$  weer gecompenseerd.

Op grond van deze redenering stelt men voor het gemak  $\tau = 1$ , waardoor terwille van de wiskundige bewerkingen met een ideale bemonsteringsschakelaar wordt gewerkt, indien  $\tau \ll T$ .

In het geval dat er geen houdschakeling in het systeem is opgenomen, is dit niet geoorloofd en moet met formule (11.5) worden gewerkt.

Hiervoor werd aangegeven dat een signaalbemonstering kan worden opgevat als het periodiek (periodeduur  $T$ ) sluiten van een schakelaar gedurende een korte tijd  $\tau$ , of als een modulatieproces. Daar het resultaat van beide methoden hetzelfde is zal ook de wiskundige beschrijving dezelfde zijn.

Het resultaat van een dergelijke bemonstering van een signaal  $x(t)$  wordt aangeduid met  $x^*(t)$ . Dit bemonsterde signaal bestaat uit een reeks pulsen met breedte  $\tau$  en een hoogte  $x(nT)$ . Indien  $\tau \ll T$  en de bemonstering minstens voldoet aan het bemonsteringstheorema van Shannon (zie de uitdrukkingen (10.2) en (10.3)), dan zullen de hoogten van  $x(nT)$  nagenoeg constant zijn. De *pulsreeks* kunnen we noteren als:

$$\left. \begin{aligned} x^*(t) &= [x(nT)], \text{ met } n = 0, 1, 2, \dots \\ &= x(0), x(T), x(2T), \dots \end{aligned} \right\} \quad (11.6)$$

De breedte  $\tau$  van de pulsen wordt in de praktijk bepaald door de opbouw van het ingangscircuit gevormd door de 'sample and hold' en de analoog-digitaal-converter. Enerzijds mag  $\tau$  niet te groot zijn, omdat dan immers de hoogte van een puls te veel varieert gedurende het nemen van het monster, anderzijds mag  $\tau$  niet te kort zijn omdat dan de energie-inhoud van de puls te klein wordt. Het niet constant zijn van de pulshoogte heeft (soms) nadelige invloed op de nauwkeurigheid van de analoog-digitaal-omzetting. Een te smalle puls zou door de geringe energie-inhoud te veel worden beïnvloed door het belastend circuit met een RC-ingangskarakter.

Theoretisch is echter zoals wij zagen de beschrijving van het bemonsteringsproces met eindige pulsbreedte  $\tau$  vrij lastig. Indien de pulsbreedte zeer klein is ten opzichte van de bemonsteringsperiode  $T$ , dan kan het bemonsterde signaal ook worden beschreven door een z.g. *impulsreeks*. Een dergelijke impulsreeks kan worden verkregen door het analogeingangssignaal van de bemonsteringsschakeling te vermenigvuldigen met een eenheidsimpulsreeks.

De eenheidsimpulsreeks bestaat uit een reeks pulsen op de tijdstippen  $t = 0, T, 2T, 3T, \dots$  met pulsbreedte  $\tau$  en pulshoogte  $\frac{1}{\tau}$ , waarbij  $\tau \rightarrow 0$ ; zie ook § 10.7. Zulke pulsen worden ook aangeduid met Dirac- of  $\delta$ -pulsen. De energie-inhoud komt overeen met de oppervlakte van de pulsen en bedraagt dus  $\tau \cdot \frac{1}{\tau} = 1$ . Een dergelijke impulsreeks kan worden genoteerd als:

$$\delta_T(t) = [\delta(nT)] = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (11.7)$$

Voor het bemonsterde signaal  $x^*(t)$  kan volgens de 'modulator-opvatting' worden geschreven:

$$x^*(t) = x(t) \delta_T(t) = x(t) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (11.8)$$

Omdat  $\delta_T(t) = 0$  voor  $t \neq 0, T, 2T, 3T, \dots$  gaat, aangenomen dat  $x(t) = 0$  voor  $t < 0$ , formule (11.8) over in:

$$x^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \cdot \delta(t - nT) \quad (11.9)$$

en ook: 
$$x^*(t) = x(0) \delta(t) + x(T) \delta(t - T) + x(2T) \delta(t - 2T) + \dots \quad (11.10)$$

Het bemonsterde signaal bestaat dan dus uit een reeks pulsen met *energie-inhoud*  $x(nT)$  en is afkomstig van een ideaal gedachte bemonsteringsschakelaar.

**Voorbeeld 11.1**

Het analoge te bemonsteren signaal heeft de vorm:

$$x(t) = 4 e^{-2t} \quad (11.11)$$

De bemonsteringsperiode bedraagt  $\frac{1}{2}$  s. De impulsreeks die het bemonsterde signaal  $x^*(t)$  beschrijft luidt dan (volgens formule (11.10)):

$$x^*(t) = 4 \delta(t) + 1,47 \delta(t - \frac{1}{2}) + 0,54 \delta(t - 1) + 0,2 \delta(t - 1\frac{1}{2}) + \dots \quad (11.12)$$

Zie ook fig. 11.3.

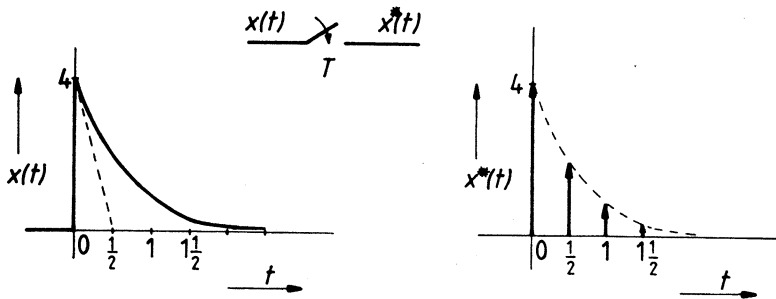


Fig. 11.3 Een bemonsterd signaal aangegeven met een impulsreeks

## 11.3 De laplace-getransformeerde van een bemonsterd signaal

De laplace-getransformeerde  $X^*(s)$  van  $x^*(t)$  kan als volgt worden bepaald:

$$\begin{aligned} X^*(s) &= \mathcal{L}\{x^*(t)\} = \mathcal{L}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT)\right\} \\ &= \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT) e^{-st} dt \end{aligned} \quad (11.13)$$

Opmerking:

Voor het bepalen van de laplace-getransformeerde geldt in het algemeen:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt. \quad (11.14)$$

Uitdrukking (11.13) heeft slechts betekenis op de tijdstippen  $t = 0, T, 2T, 3T, \dots$ , dus kan voor  $X^*(s)$  worden geschreven:

$$\begin{aligned} X^*(s) &= \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT) e^{-snT} dt = \\ &= \int_0^{\infty} x(0) \delta(t) dt + \int_0^{\infty} x(T) \delta(t - T) e^{-sT} dt + \\ &+ \int_0^{\infty} x(2T) \delta(t - 2T) e^{-2sT} dt + \dots = \\ &= x(0) \int_0^{\infty} \delta(t) dt + x(T) e^{-sT} \int_0^{\infty} \delta(t - T) dt + \\ &+ x(2T) e^{-2sT} \int_0^{\infty} \delta(t - 2T) dt + \dots \end{aligned} \quad (11.15)$$

Nu geldt in het algemeen dat de integraal van een eenheidsimpuls gelijk is aan één, immers de oppervlakte is één. Hierdoor gaat uitdrukking (11.15) over in:

$$X^*(s) = x(0) + x(T) e^{-sT} + x(2T) e^{-2sT} + \dots \quad (11.16)$$

en ook:

$$X^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-snT} \quad (11.17)$$

Met behulp van formule (11.17) is het in principe mogelijk om van elk bemonsterd signaal de laplace-getransformeerde te bepalen, mits althans de laplace-getransformeerde van het oorspronkelijke, niet bemonsterde, signaal zelf bestaat.

Voorbeeld 11.2

Stel  $x(t) = e^{-at}$ . Gevraagd wordt  $X^*(s)$  te bepalen.

Oplossing: (zie uitdrukking (11.17))

$$\begin{aligned} X^*(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-snT} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-anT} \cdot e^{-snT} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(s+a)nT} = \\ &= 1 + e^{-(s+a)T} + e^{-2(s+a)T} + e^{-3(s+a)T} + \dots \end{aligned} \quad (11.18)$$

Uitdrukking (11.18) stelt een meetkundige reeks voor met beginterm 1 en reden  $e^{-(s+a)T}$ , zodat hiervoor ook kan worden geschreven:

$$X^*(s) = \frac{1}{1 - e^{-(s+a)T}} = \frac{1}{1 - e^{-sT}e^{-aT}} \quad (11.19)$$

Uit dit eenvoudige voorbeeld blijkt reeds dat de uitdrukking voor  $X^*(s)$  geheel anders is dan die voor  $X(s)$ ; deze laatste is immers gelijk aan  $X(s) = \frac{1}{s+a}$ . De betekenis en het gebruik van de laplace-getransformeerden van bemonsterde signalen komen later aan de orde.

## 11.4 Fourier-reeksontwikkeling van een bemonsterd signaal

Ten behoeve van analyse in het frequentiedomein van signalen is het handig de bemonsterde vorm daarvan in een Fourier-reeks te ontwikkelen.

Volgens (11.8) kan de bemonsterde vorm van een signaal  $x(t)$  worden geschreven als:

$$x^*(t) = x(t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$$

We kunnen nu in eerste instantie de éénheids-impulsreeks  $\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$  in een Fourier-reeks ontwikkelen. We beschouwen hiertoe deze impulstrein eerst als een periodieke pulstrein  $f(t)$ , met pulsbreedte  $\tau$  en pulshoogte  $\frac{1}{\tau}$ ; de oppervlakte is dus 1. Hiervan wordt de Fourier-reeks bepaald terwijl we daarna de pulsbreedte  $\tau$  naar nul laten gaan. In fig. 11.4 is de pulsreeks met pulsbreedte  $\tau$  aangegeven.

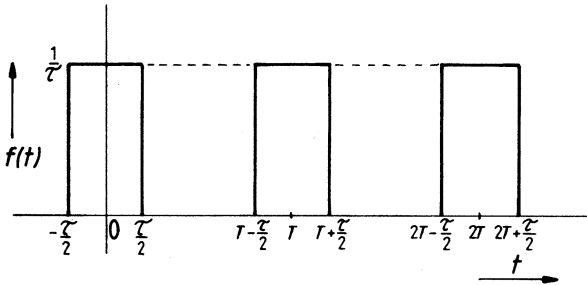


Fig. 11.4 Pulstrein met eindige afmetingen

De algemene formule voor de bepaling van de Fourier-reeks luidt:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t, \quad (11.20)$$

met: 
$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t dt$$

Vanwege spiegelbeeldsymmetrie is  $b_n = 0$ .

Voor  $a_0$  geldt:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{T} \left[ \int_0^{\frac{1}{2}\tau} \frac{1}{\tau} dt + \int_{T-\frac{1}{2}\tau}^T \frac{1}{\tau} dt \right] = \\ &= \frac{1}{T} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{T} \end{aligned} \quad (11.21)$$

Voor  $a_n$  geldt:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{1}{2}\tau} \frac{1}{\tau} \cos n\omega t dt + \\ &+ \frac{2}{T} \int_{T-\frac{1}{2}\tau}^T \frac{1}{\tau} \cos n\omega t dt \end{aligned}$$

Uit symmetrie-overwegingen kan hiervoor worden geschreven:

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \cdot \frac{2}{T} \int_0^{\frac{1}{2}\tau} \frac{1}{\tau} \cos n\omega t dt = \frac{4}{\tau T} \int_0^{\frac{1}{2}\tau} \cos n\omega t dt = \\ &= \frac{4}{n\omega\tau T} \sin n\omega t \Big|_0^{\frac{1}{2}\tau} = \frac{4 \sin \frac{1}{2} n\omega\tau}{Tn\omega\tau} \end{aligned} \quad (11.22)$$

Indien de limiet voor  $\tau \rightarrow 0$  wordt genomen levert dit:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{2}{T} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} n\omega\tau}{\frac{1}{2} n\omega\tau} = \frac{2}{T} \quad (11.23)$$

Voor  $\sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$  geldt dan met behulp van (11.20), (11.21) en (11.23);

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) &= \frac{1}{T} + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\omega t = \\ &= \frac{1}{T} [1 + 2 \cos \omega t + 2 \cos 2\omega t + 2 \cos 3\omega t + \dots] \end{aligned} \quad (11.24)$$

Toepassen van de stelling van Euler ( $e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$ ) levert:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) &= \frac{1}{T} \left[ 1 + e^{j\omega t} + e^{-j\omega t} + e^{2j\omega t} + e^{-2j\omega t} + \dots \right] = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega t} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn\omega t} \end{aligned} \quad (11.25)$$

waarin  $\omega = \omega_s = \frac{2\pi}{T}$  de *bemonsteringsradiaalfrequentie* (in rad/s) is. Substitutie van (11.25) in (11.8) levert voor het bemonsterde signaal  $x^*(t)$ :

$$x^*(t) = x(t) \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn\omega_s t} \quad (11.26)$$

De laplace-getransformeerde,  $X^*(s)$ , hiervan luidt:

$$\begin{aligned} X^*(s) &= \mathcal{L} [x^*(t)] = \int_0^{\infty} x(t) \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn\omega_s t} \cdot e^{-st} dt = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} x(t) e^{-jn\omega_s t} e^{-st} dt = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} x(t) e^{-(s+jn\omega_s)t} dt \end{aligned}$$

Of: 
$$X^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(s + jn\omega_s) \quad (11.27)$$

Aan de hand van het volgende voorbeeld wordt de betekenis van formule (11.27) toegelicht.

Voorbeeld 11.3

$x(t) = e^{-at}$ ; dan is  $X(s) = \frac{1}{s+a}$ . Met behulp van (11.27) wordt  $X^*(s)$ :

$$\begin{aligned} X^*(s) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{s+a+jn\omega_s} = \frac{1}{T} \left[ \frac{1}{s+a} + \frac{1}{s+a+j\omega_s} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{s+a-j\omega_s} + \dots \right] = \\ &= \frac{1}{T} \cdot \left[ \frac{T(s)}{(s+a)(s+a+j\omega_s)(s+a-j\omega_s)(s+a+2j\omega_s)(s+a-2j\omega_s)\dots} \right] \end{aligned} \quad (11.28)$$

In figuur 11.5 is het *polenbeeld* van  $X^*(s)$  weergegeven.

Uit dit polenbeeld blijkt dat de oorspronkelijke pool  $s = -a$  van  $X(s)$ , 'om de  $\omega_s$ ' herhaald wordt. Het aantal polen van  $X^*(s)$  is dus oneindig groot. De ligging van de nulpunten van  $X^*(s)$  is aanzienlijk lastiger te bepalen, maar is voor de verdere beschouwingen niet van belang.

Volgens formule (11.27) kan in het algemeen gesteld worden, dat het polenbeeld van een willekeurige laplace-getransformeerde vorm  $X^*(s)$ , ongeacht of  $X(s)$  nu een signaal of een systeem beschrijft, de gevonden periodiciteit vertoont. In fig. 11.6 is dit voor een systeem met drie polen ( $s_1$ ,  $s_2$  en  $s_3$ ) aangegeven.

Het gedeelte van het  $s$ -vlak dat tussen  $+\frac{1}{2}j\omega_s$  en  $-\frac{1}{2}j\omega_s$  ligt, noemt men de *primaire strook*.



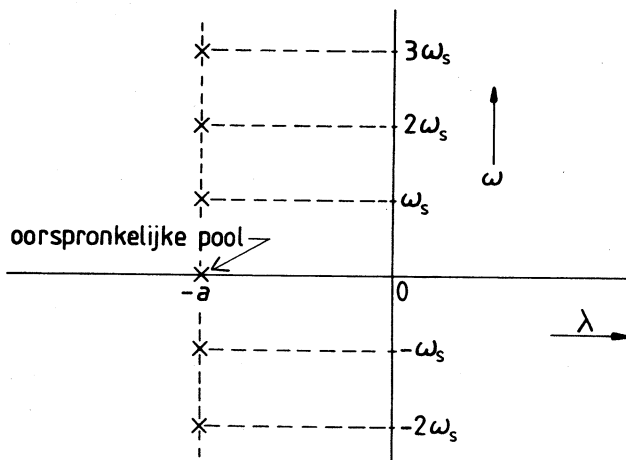


Fig. 11.5 Polenbeeld van  $X^*(s)$ , indien  $X(s) = \frac{1}{s+a}$

Het frequentiespectrum van het bemonsterde signaal kan gemakkelijk worden bepaald door in (11.27)  $s = j\omega$  te substitueren; we vinden dan:

$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(j\omega + jn\omega_s) \quad (11.29)$$

Uit formule (11.29) blijkt, dat indien het oorspronkelijke signaal een frequentiecomponent  $\omega_1$  bevat, het bemonsterde signaal de frequenties  $\omega_1 \pm n\omega_s$  bevat. De frequentiecomponenten  $n\omega_s$  zijn *hogere harmonischen*. Hetzelfde betoog geldt uiteraard voor een hele frequentieband; de frequentieband (*het spectrum*) wordt dan herhaald met een periodiciteit  $\omega_s$ ; zie ook § 10.7. Er ontstaan hierdoor oneindig veel *hoogfrequentspectra*. In

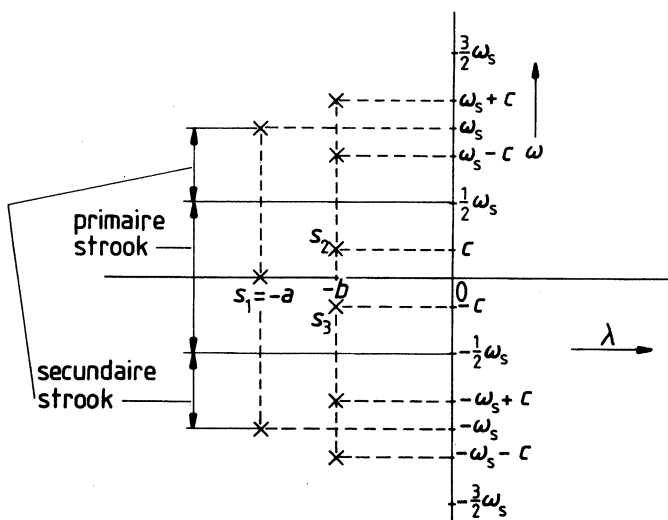


Fig. 11.6 Polenbeeld van  $X^*(s)$ , indien  $X(s) = \frac{1}{(s+a)(s^2 + 2bs + b^2 + c^2)}$

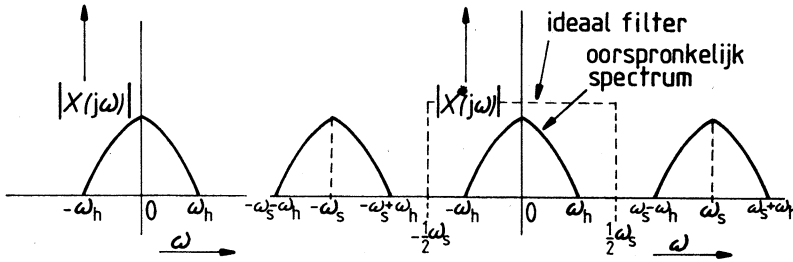


Fig. 11.7 Frequentiespectrum van  $X^*(j\omega)$ , bij gegeven  $X(j\omega)$

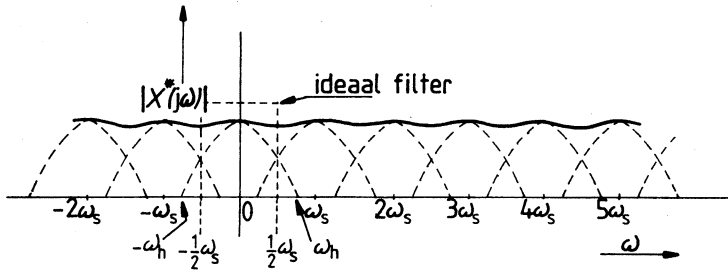


Fig. 11.8 Frequentiespectrum van  $X^*(j\omega)$ , indien  $\omega_h > \frac{1}{2} \omega_s$

fig. 11.7 is dit aangegeven, aan de hand van een gegeven frequentiespectrum (modulus-karakteristiek) van  $X(j\omega)$ . In deze figuur stelt  $\omega_h$  de hoogst voorkomende (radiaal)frequentie in het spectrum van  $X(j\omega)$  voor. Uit deze figuur blijkt tevens dat voor  $\omega_h = \frac{1}{2} \omega_s$  de frequentiebanden elkaar precies raken. Het is dan nog mogelijk om met behulp van een *ideaal filter* (stippellijn)  $X(j\omega)$  uit het bemonsterde signaal terug te 'winnen'. Indien  $\omega_h > \frac{1}{2} \omega_s$  lukt dit niet meer; het is dan niet meer mogelijk om zonder *distorsie* het oorspronkelijke signaal uit het bemonsterde signaal te filteren; zie fig. 11.8.

De uit het voorgaande betoog volgende bemonsteringseis:

$$\omega_s \geq 2 \omega_h, \text{ of ook: } f_s \geq 2 f_h \quad (11.30)$$

staat, zoals we reeds in § 10.4 zagen, bekend als het *bemonsteringstheorema van Shannon*. Wordt aan deze eis niet voldaan, zoals b.v. in fig. 11.8 is aangegeven, dan overlappen (Eng. 'aliasing') de frequentiebanden elkaar en kunnen de hoogfrequentcomponenten van  $X(j\omega)$  niet meer worden onderscheiden van de hogere harmonischen die ontstaan zijn door het bemonsteringsproces.

Indien een signaal van 1 Hz wordt bemonsterd met 3 Hz dan kan het oorspronkelijke signaal weer worden gereconstrueerd. Wordt echter de 'sample'-frequentie verlaagd tot  $\frac{4}{3}$  Hz, dan ontstaat er bij de reconstructie een signaal van  $\frac{1}{3}$  Hz.

In het algemeen moeten we er dus voor zorgen dat indien de bemonsteringsfrequentie niet voldoende hoog kan worden gekozen om 'aliasing' te voorkomen, dat dan de hoogfrequentcomponenten in het te bemonsteren signaal worden uitgefilterd vóór de bemonstering. De daarvoor toegepaste filters worden '*anti-aliasing*'-filters genoemd.

Merk op dat de factor  $\frac{1}{T}$  in formule (11.29) gecompenseerd wordt door de factor  $T$  in

formule (10.14), zodat bij het bemonsterings- en reconstructieproces geen signaalsterkte verloren gaat.

Resumerend kan worden gesteld, dat we twee uitdrukkingen voor  $X^*(s)$  hebben gevonden; de één via direct toepassen van de laplace-transformatie en de ander via de Fourierreeksontwikkeling. Deze laatste schrijfwijze leent zich goed voor analyse in het frequentie-domein door substitutie van  $s = j\omega$ .

Directe schrijfwijze: 
$$X^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-snT}$$

Via Fourier-reeksontwikkeling: 
$$X^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(s + jn\omega_s)$$

Frequentie-domein-schrijfwijze: 
$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(j\omega + jn\omega_s)$$

## 11.5 De z-transformatie

In voorbeeld 11.2 zagen we reeds dat de laplace-getransformeerde vorm van een bemonsterd signaal er totaal anders uitziet dan die van een continu signaal. Het zal blijken dat de mathematische beschouwingen over bemonsterde systemen aanzienlijk worden vereenvoudigd, indien we gebruik maken van de z.g. *z-transformatie*. Bij deze transformatie past men op een *bemonsterde uitdrukking* de volgende substitutie toe:

$$e^{-sT} = z^{-1} \quad (11.31)$$

of: 
$$s = \frac{1}{T} \ln z \quad (11.32)$$

Het is gezien de latere toepassingen van deze transformatie belangrijk, reeds nu in te zien dat de factor  $z^{-1}$  in feite neerkomt op een *looptijd gelijk aan de bemonsteringsperiode T*. (zie uitdrukking (11.31)).

Met behulp van de in formule (11.32) geïntroduceerde substitutie, kan voor de laplace-getransformeerde vorm  $X^*(s)$  van  $x^*(t)$  volgens (11.17) worden geschreven:

$$X(z) = X^*(s) \left|_{s = \frac{1}{T} \ln z} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-snT} \right|_{s = \frac{1}{T} \ln z}$$

of: 
$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) z^{-n} \quad (11.33)$$

$$X(z) = x(0) + x(T) z^{-1} + x(2T) z^{-2} + \dots \quad (11.34)$$

Behalve op bemonsterde signalen kan, zoals nog zal blijken, de z-transformatie ook worden toegepast op *rijen van getallen* alsmede op elementen die discrete signalen bewerken, de z.g. *discrete elementen*.

In de vier volgende voorbeelden zal de z-transformatie volgens (11.33) of (11.34) worden toegepast. Vaak zal blijken dat de z-getransformeerden convergente meetkundige reeksen voorstellen zoals in de voorbeelden 11.4, 11.5 en 11.6. In voorbeeld 11.7 wordt van een willekeurige reeks getallen de z-getransformeerde vorm bepaald.

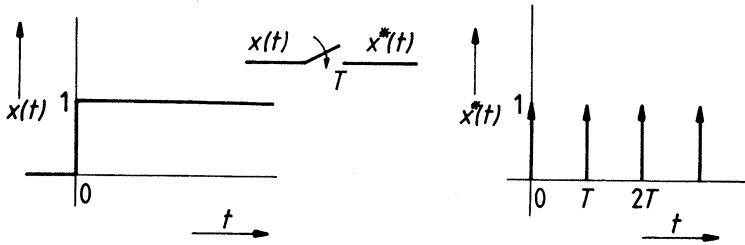


Fig. 11.9 Het bemonsteren van een eenheidsstap

Voorbeeld 11.4

Bepaling van de z-getransformeerde van een bemonsterde éénheidsstap, zie fig. 11.9.

Gegeven is:

$$x(t) = 1(t), \text{ d.w.z. } x(t) = 0 \text{ voor } t < 0 \\ \text{en } x(t) = 1 \text{ voor } t > 0$$

Dus

$$x^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT) \text{ met } x(nT) = 1.$$

Volgens formule (11.34) is  $X(z)$ :

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) z^{-n} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots$$

Deze uitdrukking stelt een meetkundige reeks voor, waarvan  $X(z)$  de som is en gegeven wordt door:

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} \quad (11.35)$$

Voorbeeld 11.5

Bepaling van de z-getransformeerde van het bemonsterde signaal van  $x(t) = e^{-at}$ .

Voor  $x^*(t)$  geldt:

$$x^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-anT} \delta(t - nT)$$

zodat volgens formule (11.33) en (11.34) voor  $X(z)$  geldt:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-anT} z^{-n} = \\ = 1 + e^{-aT} z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2} + \dots$$

Voor  $X(z)$  vinden we dan op dezelfde wijze als in voorbeeld 11.4:

$$X(z) = \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}} \quad (11.36)$$

Substitutie van  $e^{-sT} = z^{-1}$  in het resultaat van voorbeeld (11.2) levert uiteraard hetzelfde antwoord. (Ga dit na!)

Voorbeeld 11.6

Bepaling van de  $z$ -getransformeerde van  $x(nT) = a^n$ . De reeks  $[x(nT)]$  kan worden geschreven als:

$$[x(nT)] = 1, a, a^2, a^3, \dots$$

Hiermee wordt:

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + \dots = \\ &= \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \end{aligned} \quad (11.37)$$

Voorbeeld 11.7

Bepaling van de  $z$ -getransformeerde van een willekeurige reeks getallen. Gegeven een reeks getallen:  $[x(nT)] = 3, 1, 0, -2, 0, 0, 0, \dots$

De  $z$ -getransformeerde van  $[x(nT)]$  wordt:

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) z^{-n} = 3 + 1 z^{-1} + 0 z^{-2} + (-2) z^{-3} = \\ &= 3 + \frac{1}{z} - \frac{2}{z^3} = \frac{3z^3 + z^2 - 2}{z^3} \end{aligned} \quad (11.38)$$

## 11.6 De tabel van $z$ -getransformeerden en enkele eigenschappen van de $z$ -transformatie

Met behulp van uitdrukking (11.33) kunnen  $z$ -getransformeerden worden bepaald. In tabel 11.1 zijn van de meeste in de regeltechniek voorkomende functies de  $z$ -getransformeerden aangegeven. Tevens zijn in deze tabel enkele eigenschappen van de  $z$ -transformatie vermeld. Voor de bewijzen van deze eigenschappen wordt verwezen naar meer uitgebreide literatuur over dit onderwerp. Tenzij anders vermeld beginnen alle signalen op  $t = 0$ .

	systeem	signaal $f(t)$	$F(s)$	$F(z)$
1	integrator	1	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
2	twee integratoren	$t$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{zT}{(z-1)^2}$
3	eerste-orde-systeem	$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
4	-	$te^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{zTe^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
5	ongedempt tweede-orde-systeem	$\sin bt$	$\frac{b}{s^2+b^2}$	$\frac{z \sin bT}{z^2-2z \cos bT+1}$
		$\cos bt$	$\frac{s}{s^2+b^2}$	$\frac{z(z-\cos bT)}{z^2-2z \cos bT+1}$
6	gedempt tweede-orde-systeem	$e^{-at} \sin bt$	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$	$\frac{ze^{-aT} \sin bT}{z^2-2ze^{-aT} \cos bT+e^{-2aT}}$
		$e^{-at} \cos bt$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$\frac{z^2-ze^{-aT} \cos bT}{z^2-2ze^{-aT} \cos bT+e^{-2aT}}$
7	-	$x(nT) = a^n$	-	$\frac{z}{z-a}$

### Eigenschappen

#### 8 Lineariteitsregel

$$a f_1(t) \pm b f_2(t) \iff a F_1(z) \pm b F_2(z)$$

#### 9 Verschuivingsregel

$$f(t-mT) \iff z^{-m} F(z)$$

#### 10 Vermenigvuldigen met $t$

$$t \cdot f(t) \iff -Tz \frac{d}{dz} \{F(z)\}$$

#### 11 Limietwaardetheorema's

$$a \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) \quad b \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} F(z)$$

Tabel 11.1 Tabel van  $z$ -transformaties en eigenschappen

De z-getransformeerden in tabel 11.1 zijn uiteraard bepaald voor de bemonsterde uitdrukkingen, dus van  $x^*(t)$  of van  $X^*(s)$ . In het vervolg van dit boek wordt telkens daar waar  $F(z)$  rechtstreeks bepaald wordt uit  $F(s)$ , dan ook bedoeld dat de z-getransformeerde van het *bemonsterde signaal* wordt bepaald.

In de drie volgende voorbeelden wordt het gebruik van de z-transformatietabel voor het bepalen van  $F(z)$  verduidelijkt.

Voorbeeld 11.8

Gegeven: 
$$X(s) = \frac{1}{s(s+1)} \quad (11.39)$$

Gevraagd:  $X(z)$

Oplossing:

We schrijven  $X(s)$  in een zodanige vorm dat de delen van  $X(s)$  te herkennen zijn in de tabel. Merk op dat *niet* geldt:  $\mathcal{L}\{f_1(s) \cdot f_2(s)\} = F_1(z) \cdot F_2(z)$ . Door *breuksplitsing* van  $X(s)$  ontstaat een geschikte vorm voor transformatie, immers:

$$X(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

Daarmee wordt, in verband met eigenschap 8:

$$\mathcal{L}\{X(s)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{L}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$

Regel 1 en 3 uit tabel 11.1 leveren daarmee:

$$X(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}} = \frac{z(1-e^{-T})}{(z-1) \cdot (z-e^{-T})} \quad (11.40)$$

Voorbeeld 11.9.

Gegeven: 
$$X(s) = \frac{e^{-sT_d}}{s+2}, \text{ met } T_d = 2T. \quad (11.41)$$

Gevraagd:  $X(z)$

Oplossing:

Volgens regel 9 geldt:

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{-2sT}}{s+2}\right\} = z^{-2} \mathcal{L}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = \\ &= z^{-2} \cdot \frac{z}{z-e^{-2T}} = \frac{1}{z(z-e^{-2T})} \end{aligned} \quad (11.42)$$

Voorbeeld 11.10.

Gegeven:  $x(t) = 4(1 - t) e^{-2t}$  (11.43)

Gevraagd:  $X(z)$

Oplossing:

$$x(t) = 4(e^{-2t} - t e^{-2t})$$

Volgens regel 3 en 4 geldt dan:

$$\begin{aligned} X(z) &= 4 \left\{ \frac{z}{z - e^{-2T}} - \frac{zT e^{-2T}}{(z - e^{-2T})^2} \right\} \\ &= 4 \frac{z(z - e^{-2T}(1 + T))}{(z - e^{-2T})^2} \end{aligned} \quad (11.44)$$

## 11.7 Terugtransformatie

Voor terugtransformatie van het  $z$ -domein naar het tijddomein, de z.g. *inverse z-transformatie*, komen in principe twee methoden in aanmerking, namelijk:

- a Terugtransformatie met behulp van de  $z$ -transformatietabel en de rekenregels.
- b Terugtransformatie door middel van deling.

Aan de hand van twee voorbeelden zullen deze methoden worden toegelicht. Er zijn geen algemene regels, die aanduiden welke van de twee oplossingsmethoden het snelst werkt in een bepaald geval. Vaak is het ook een kwestie van persoonlijke voorkeur.

Ad a Bij de terugtransformatie met behulp van de  $z$ -transformatietabel wordt een 'truc' toegepast, welke als volgt kan worden geformuleerd: 'Houd eerst een factor  $z$  in de teller achter de hand, pas daarna op de 'rest' breuksplitsing toe en transformeer met behulp van de tabel de verkregen uitdrukking naar het tijddomein.'

Voorbeeld 11.11

Gegeven:  $X(z) = \frac{z}{(z - 1)(z - 2)}$  (11.45)

Gevraagd:  $[x(nT)]$

Oplossing:

'Houd  $z$  achter de hand', dus

$$X(z) = z \left[ \frac{1}{(z - 1)(z - 2)} \right]$$



Pas breuksplitsing toe:

$$X(z) = z \left[ \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2} \right] = \frac{-z}{z-1} + \frac{z}{z-2}$$

Met behulp van de transformatietabel (regel 1 en 7) geldt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(nT) = \sum_{n=0}^{\infty} [-1 + 2^n] \quad (11.46)$$

Of:  $[x(nT)] = 0, 1, 3, 7, 15, \dots$

Ad b Terugtransformatie door middel van deling spreekt voor zich. Met dezelfde gegevens als in het vorige voorbeeld zal deze methode worden toegelicht.

Voorbeeld 11.12

Gegeven:  $X(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)} \quad (11.47)$

Gevraagd:  $[x(nT)]$

Oplossing:

$$X(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{z}{z^2 - 3z + 2}$$

Delen:

$$\begin{array}{r} z^2 - 3z + 2 \quad \Big/ \quad \begin{array}{l} z \\ z - 3 + 2z^{-1} \end{array} \quad \Big\backslash \quad \begin{array}{l} z^{-1} + 3z^{-2} + 7z^{-3} + 15z^{-4} + \dots \end{array} \\ \hline \begin{array}{l} 3 - 2z^{-1} \\ 3 - 9z^{-1} + 6z^{-2} \end{array} \\ \hline \begin{array}{l} 7z^{-1} - 6z^{-2} \\ 7z^{-1} - 21z^{-2} + 14 \end{array} \\ \hline \begin{array}{l} 15z^{-2} - 14 \\ \text{enz.} \end{array} \end{array}$$

Dus:  $X(z) = z^{-1} + 3z^{-2} + 7z^{-3} + 15z^{-4} + \dots$

Volgens formule (11.34) volgt hieruit het eveneens in (11.46) gevonden resultaat:

$$[x(nT)] = 0, 1, 3, 7, 15, \dots \quad (11.48)$$

Opmerkingen:

- 1 Het voordeel van de eerste methode voor terugtransformatie van het  $z$ -domein naar het  $t$ -domein is dat uit de verkregen uitdrukking voor  $x(nT)$  gemakkelijk een signaalwaarde op een willekeurig bemonsteringstijdstip kan worden bepaald. Met behulp van de deelprocedure kan zo iets een moeizaam karwei worden.
- 2 Met de inverse  $z$ -transformatie ontstaat slechts informatie omtrent de waarden van het betreffende signaal op de bemonsteringstijdstippen. Over het verloop van het signaal tussen de bemonsteringstijdstippen wordt niets bekend.

## 11.8 De $w$ -transformatie

Door de  $z$ -transformatie wordt het polen- en nulpuntenbeeld van een systeem met signaalbemonstering uit het  $s$ -domein getransformeerd naar een pn-beeld in het  $z$ -domein. De ten gevolge van de signaalbemonstering ontstane toegevoegde complexe polen en/of nulpunten in het  $s$ -domein, met als imaginair deel een veelvoud van de bemonsterings-frequentie (zie fig. 11.5), vallen in het  $z$ -domein samen.

Voor de  $z$ -transformatie geldt:

$$|z| = e^{\lambda T} \quad \text{en} \quad \arg z = \omega T \quad (11.49)$$

De positieve imaginaire as in het  $s$ -domein, dit is de  $\omega$ -as van het Bode-diagram, wordt in het  $z$ -vlak afgebeeld op de eenheidscirkel, waarbij voor  $0 \leq \omega \leq \frac{\omega_s}{2}$  de halve cirkel wordt doorlopen, in de richting tegen de wijzers van de klok in. Voor  $0 \geq \omega \geq -\frac{\omega_s}{2}$  wordt de andere helft van de eenheidscirkel doorlopen.

Met behulp van een zogenaamde bilineaire transformatie is de eenheidscirkel uit het  $z$ -vlak weer af te beelden op een imaginaire as in een ander complex vlak.

Vaak wordt voor deze bilineaire transformatie de zgn.  $w$ -transformatie gebruikt, gedefinieerd als volgt:

$$w = \frac{z-1}{z+1} \quad \text{en ook:} \quad z = \frac{1+w}{1-w} \quad (11.50)$$

De eigenschappen van het systeem met signaalbemonstering worden dan uit het  $z$ -vlak afgebeeld in het  $w$ -vlak. Dit  $w$ -vlak heeft het karakter van een frequentie-diagram.

Het voordeel van de  $w$ -transformatie is dat er in het  $w$ -vlak geen strookvorming optreedt, zoals dat wel het geval was in het  $s$ -domein indien we daar het pn-beeld tekenen van systemen met signaalbemonstering.

Stellen we in het  $w$ -vlak:

$$w = \sigma + j\Omega \quad (11.51)$$

dan geldt voor de afbeelding van de eenheidscirkel uit het  $z$ -vlak ( $z = e^{j\omega T}$ ):

$$w = \frac{z-1}{z+1} = \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1} = \frac{e^{j\frac{\omega T}{2}} - e^{-j\frac{\omega T}{2}}}{e^{j\frac{\omega T}{2}} + e^{-j\frac{\omega T}{2}}}$$

$$= j \tan \frac{\omega T}{2} = j\Omega \quad (11.52)$$

We zien dan dat door de keuze van deze transformatie inderdaad de eenheidscirkel uit het  $z$ -vlak wordt getransformeerd naar de imaginaire as van het  $w$ -vlak.

Voor de 'hulpfrequentie'  $\Omega$  geldt:

$$\Omega = \tan \frac{\omega T}{2}, \text{ of ook } \omega = \frac{2}{T} \arctan \Omega \quad (11.53)$$

Het, helaas niet-lineaire, verband tussen de  $\Omega$ -schaal langs de imaginaire as in het  $w$ -vlak en de  $\omega$ -schaal langs de eenheidscirkel in het  $z$ -vlak of langs de imaginaire as in het  $s$ -vlak is volgens (11.53) weergegeven in fig. 11.10.

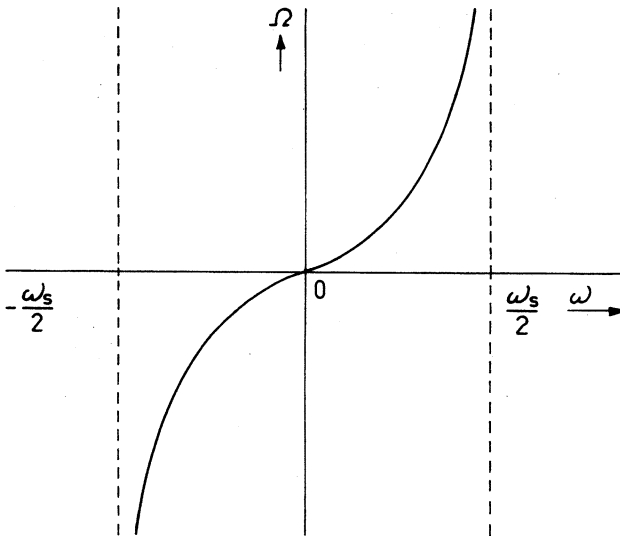


Fig. 11.10 Verband tussen  $\Omega$  en  $\omega$

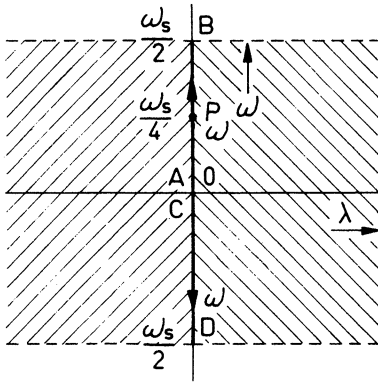
In fig. 11.11 zijn enkele overeenkomende punten c.q. puntenverzamelingen in  $s$ -,  $z$ - en  $w$ -domein aangegeven.

Met behulp van het  $w$ -vlak kunnen exacte frequentiediagrammen worden gemaakt van systemen met signaalbemonstering, zoals b.v. polaire figuren en Bode-diagrammen. Daarmee kan b.v. een stabiliteitsonderzoek worden uitgevoerd van zulke systemen of kunnen deze systemen als geregeld systeem worden ingesteld met bepaalde fase- en versterkingsmarges.

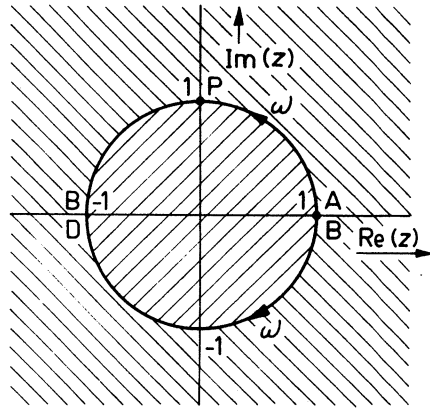
Langs de frequentie-assen van de diagrammen wordt gewoonlijk  $\Omega$  afgezet. Alleen de interessante waarden van  $\Omega$  worden dan via (11.53) omgezet in de werkelijke frequenties  $\omega$ .

#### Voorbeeld 11.13

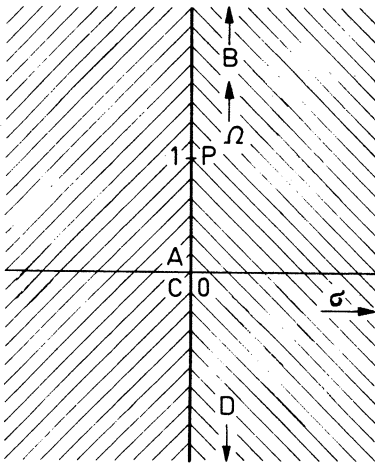
Gegeven is het blokschema van een systeem met signaalbemonstering, zie fig. 11.12.



a s-vlak



b z-vlak



c w-vlak

Fig. 11.11 Overeenkomstige punten c.q. puntenverzamelings in s-, z- en w-domein

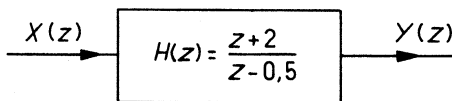


Fig. 11.12 Een systeem met signaalbemonstering

Gevraagd wordt het pn-beeld van  $H(z)$ , alsmede een schets van het Bode-diagram en de polaire figuur van dit systeem.

Er geldt:

$$H(jw) = \frac{1+w}{1-w} + 2 = 2 \frac{3-w}{1+3w} \quad (11.54)$$

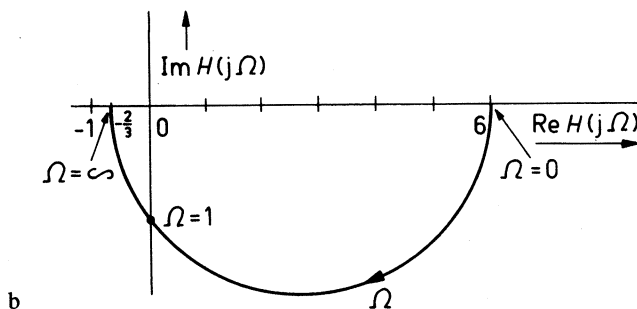
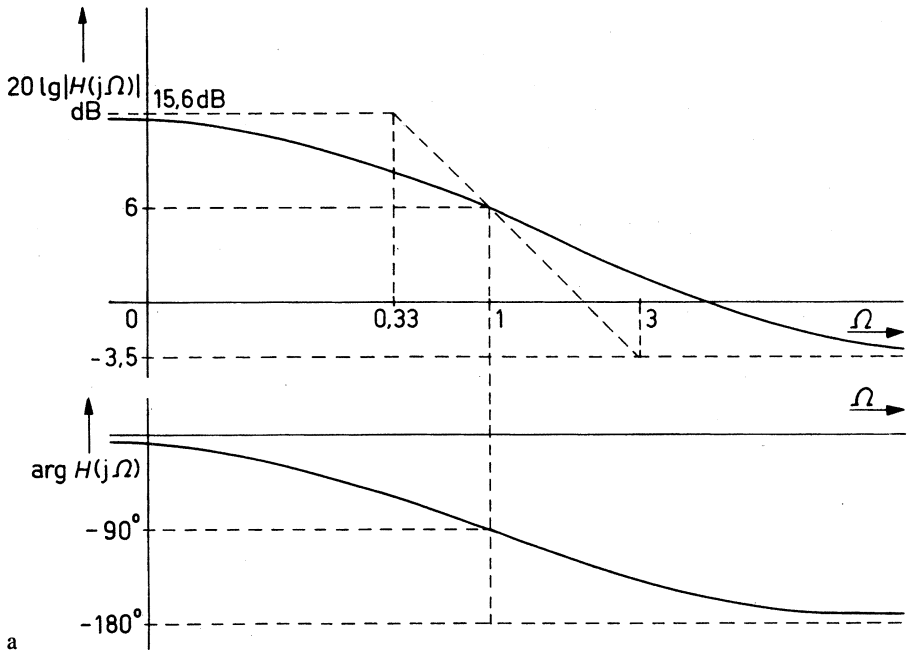
$$H(j\Omega) = 2 \frac{3 - j\Omega}{1 + j3\Omega} = 6 \frac{1 - j\frac{\Omega}{3}}{1 + j3\Omega} \quad (11.55)$$

Uit (11.55) volgt:

$$|H(j\Omega)| = 6 \frac{\sqrt{1 + (\frac{\Omega}{3})^2}}{\sqrt{1 + (3\Omega)^2}} \quad (11.56)$$

$$\arg H(j\Omega) = \arctan\left(-\frac{\Omega}{3}\right) - \arctan(3\Omega)$$

Het Bode-diagram is geschetst in fig. 11.13a, de polaire figuur in fig. 11.13b en het pn-beeld in fig. 11.13c.



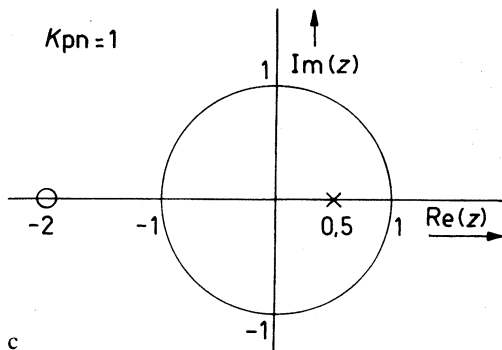


Fig. 11.13 Bode-diagram, polaire figuur en pn-beeld van het systeem

## 11.9 Opgaven

- 1 Gegeven wordt het signaal  $x(t)$  volgens fig. 11.14. De duur van de bemonsteringsperiode is  $\frac{1}{2}$  seconde, de bemonstering start op  $t = 0$ . Gevraagd wordt  $x^*(t)$  te schrijven als een impulsreeks.

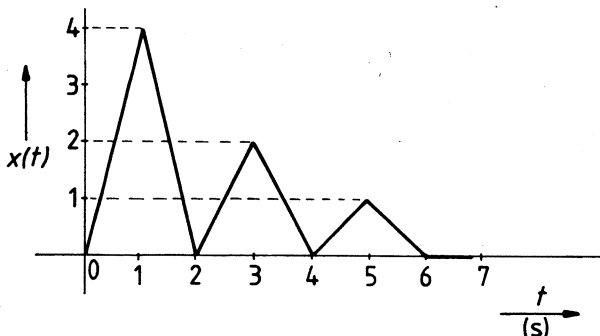


Fig. 11.14 Het signaal  $x(t)$  van opgave 1 en opgave 2

- Bepaal van het in fig. 11.14 gegeven signaal  $x(t)$  de laplace-getransformeerde schrijfwijze voor  $X^*(s)$ .
- Gegeven wordt het signaal:  $x(t) = 4 \cos 10t \cdot 1(t)$ , de bemonsteringsradiaalfrequentie is 100 rad/s, de bemonstering start op  $t = 0$ . Bepaal voor het bemonsterde signaal de uitdrukkingen  $X^*(s)$  en  $X^*(j\omega)$  en geef het pn-beeld van  $X^*(s)$ .
- Verklaar met behulp van frequentiespectra het bemonsteringstheorema van Shannon.
- Bepaal met behulp van uitdrukking (11.33) de z-getransformeerden van:
  - $x(t) = 10 \cdot 1(t - 2)$ , met  $T = 1$  s
  - $x(nT) = 2^n$
  - $x(t) = [x(nT)] = 0, 1, 2, 3, 2, 1, 0, 0 \dots$

- 6 Bepaal met behulp van de z-transformatietabel de z-getransformeerden van de bemonsterde vorm van:

a  $x(t) = 5 \cdot 1(t) + 2 \cdot 1(t - 2T)$

b  $x(t) = 5t(1 - e^{-2t}) \cdot 1(t)$

c  $x(t) = (4 \sin 5t + 8 \cos 5t) \cdot 1(t)$

d  $x(t) = 2 e^{-t} (\cos 3\pi t + \frac{1}{2} \sin 3\pi t) \cdot 1(t)$

e  $x(t) = t \sin \pi t \cdot 1(t)$

- 7 Bepaal met behulp van de limietwaardetheorema's resp.  $y(0)$  en  $y(\infty)$ , indien geldt:

$$Y(z) = \frac{2z(z - e^{-T} \cos \pi T)}{z^2 - 2z e^{-T} \cos \pi T + e^{-2T}}$$

- 8 Bepaal door middel van de inverse z-transformatie via tabel 11.1 de signalen  $x(nT)$ , waarvan de z-getransformeerden als volgt zijn gegeven:

a  $X(z) = \frac{2z}{(z - 2)(z - 4)}$

b  $X(z) = \frac{z(z - 1 + 2T)}{(z - 1)^2}$

c  $X(z) = \frac{2z(z - e^{-T} \cos \pi T + 2e^{-T} \sin \pi T)}{z^2 - 2z e^{-T} \cos \pi T + e^{-2T}}$

- 9 Bepaal door deling uit de onderstaande z-getransformeerden, het begin van de reeks  $[x(nT)]$ :

a  $X(z) = \frac{z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 4z + 5}{z^5}$

b  $X(z) = \frac{z - 1}{(z - 2)(z - 3)}$

c  $X(z) = \frac{z}{z^3 + 1}$

- 10 Bepaal de z-getransformeerde van  $X^*(s)$ , indien geldt:

$$X(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \cdot \frac{s + a}{s^2}$$

- 11 Gegeven is een signaal  $f(t)$  met laplace-getransformeerde overbrengingsfunctie:

$$F(s) = \frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2)}$$

Bepaal van het bemonsterde signaal de overbrengingsfunctie  $F(z)$ , indien de bemonsteringsperiode  $T = \ln 2$  seconde bedraagt.

- 12 Gegeven is het signaal  $f(t) = t$ . Bepaal met behulp van de formule:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-n}$$

de  $z$ -getransformeerde overbrengingsfunctie van  $f^*(t)$ .

Aanwijzing:  $F(z)$  blijkt uit een produkt van twee identieke meetkundige reeksen te bestaan.

- 13 Gegeven is een bemonsterd signaal met  $z$ -getransformeerde overbrengingsfunctie:

$$C(z) = \frac{z}{4(z - \frac{1}{2})^2 (z - 1)}$$

Gevraagd:

- a Bepaal zowel door deling als met behulp van de tabel  $c(0)$  tot en met  $c(4T)$ .
  - b Bepaal met behulp van het eindwaardetheorema  $c(\infty)$ .
- 14 Zelfde vragen als bij opgave 13, echter nu voor:

$$C(z) = \frac{-z^2 + 2z}{z^2 - 2z + 1}$$